Colle : Sujet 1

Question de cours. *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer*

1. *$g \circ f$ injective implique f injective.*
2. *$g \circ f$ injective et f surjective impliquent g injective.*
3. *$g \circ f$ surjective implique g surjective.*
4. *$g \circ f$ surjective et g injective impliquent f surjective.*

Exercice. *Soit E un ensemble. Pour $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ l'application caractéristique de A.*

1) Soient A et B des parties de E.

a) Montrer que:

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

b) On pose $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Montrer que:

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$$

2) Montrer que $\cap$ est distributive par rapport à Δ, c'est-à-dire que pour toutes parties A, B et C de E, on a:

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$$

Exercice. *Soit A, B, C trois ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to A$ trois applications. On considère les composées $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$.*

a) Montrer que si deux de ces composées sont injectives et la troisième est surjective, alors f, g et h sont bijectives.

b) Même question en supposant deux composées surjectives et la troisième injective.

Colle : Sujet 2

Question de cours. *Soit E et F deux ensemble et $f : E \to F$ une application. Donner les définitions de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité. Puis la définition de l'image directe d'une partie de E ainsi que l'image réciproque d'une partie de F.*

Exercice. *Soient f, g, h trois applications de E dans lui-même. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g, h sont bijectives.*

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice. *Soit X et Y deux ensembles, et f une fonction définie sur X avec valeurs dans Y. Soient I et J deux familles d'indices, $\{U_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de X et $\{V_j\}_{j\in J}$ une famille de sous-ensembles de Y. Établir les égalités suivantes :*

a) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} V_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)$

b) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} V_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(V_j)$

c) $f\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(U_i)$

d) A-t-on $f\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(U_i)$?

Exercice. *On suppose connue la proposition suivante : si X et Y sont deux ensembles, $f : X \to Y$ une application et $\{U_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de X, alors*

$$f\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(U_i)$$

a) Soient A et B deux ensembles, $B \subset A$ et $f : A \to B$ une application injective. On pose $C_0 = A \setminus B$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $C_k = f(C_{k-1})$.

i) Montrer que $C_m \cap C_n = \varnothing$ si $n \neq m$.

ii) En déduire qu'il existe une bijection $h : A \to B$.

b) Soient A et B deux ensembles, $f : A \to B$ et $g : B \to A$ deux applications injectives. Démontrer qu'il existe une application bijective de A sur B (Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein).