Colle n°6 : Sujet 1

Question de cours. *Soit $f \in C^0(I)$, et F une primitive de f sur I. Montrer que l'ensemble des primitives de f sur I est $\{x \longmapsto F(x)+k, k \in \mathbb{R}\}$.*

Exercice. *On fait comme si on ne connaissait pas le logarithme pour cet exercice.*
On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$: $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.
Montrer que pour tout $x, y \in]0,+\infty[$: $L(xy) = L(x) + L(y)$.

Exercice. *Calculer les intégrales suivantes :*
$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$
$\int_0^{2\pi} cos^2(t)dt$
$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$
$\int_0^1 ln(1+t^2)dt$
$\int_1^e \frac{1}{t+t(ln(t))^2}dt$.

Exercice. *Étude et graphe de la fonction*

$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

Colle n°6 : Sujet 2

Question de cours. *Qu'entend-on par linéarité de l'intégrale ?*

Exercice. *Donner une primitive de chacune des fonctions usuelles suivantes : $x \longmapsto e^{\lambda x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x-a}$, $x \longmapsto x^a$ avec $a \neq 1$, $x \longmapsto sin(x)$, $x \longmapsto ln(x)$, $x \longmapsto \frac{1}{cos(x)^2}$.*

Exercice. *Calculer les intégrales suivantes :*
$\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$
$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1+tan(t))dt$
$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$
$\int_1^{e^\pi} sin(ln(t))dt$

Exercice. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f possède une unique primitive F telle que*

$$\int_0^1 F(t)dt = 0$$

Colle n°6 : Sujet 3

Question de cours. *Énoncer et démontrer l'intégration par parties.*

Exercice. *Dériver les fonctions $f : x \longmapsto \int_0^x \frac{e^t}{t+1}dt$,*
$g : x \longmapsto \int_0^{e^x} sin(\sqrt{t})dt$ et $h : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$

Exercice. *Calculer les intégrales suivantes :*
$\int_0^1 sin(3t+2)dt$
$\int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt$
$\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}dt$
$\int_0^1 arctan(t)dt$
$\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}dt$

Exercice. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :*

$$\varphi(t) = \frac{sht}{t} \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 1$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)dt$$

1. *Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.*
2. *Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.*
3. *Dresser le tableau de variation de f.*