

Colle n°5 : Sujet 1

Question de cours. Donner les propriétés élémentaires de $\ln$.

Exercice. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(2 \arctan x)$
2. $\sin(2 \arctan x)$

Exercice. Étudier la fonction suivante afin de la représenter :
 $f: x \mapsto \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$

Exercice. Soient $(p_1, \dots, p_n)$ et $(q_1, \dots, q_n)$ des n -uplets formés de réels strictement positifs vérifiant

$$\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n q_k = 1$$

Établir

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln q_i \leq \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

Dans quel(s) cas y a-t-il égalité ?

Colle n°5 : Sujet 3

Question de cours. Donner les définitions des fonctions arcsinus, arcosinus et arctangente puis leurs dérivées.

Exercice. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(2 \arccos x)$
2. $\tan(2 \arcsin x)$

Exercice. 1. Montrer que, pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) \leq x$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$

Colle n°5 : Sujet 2

Question de cours. Donner les propriétés élémentaires de la fonction puissance.

Exercice. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(2 \arcsin x)$
2. $\sin(2 \arccos x)$

Exercice. Montrer que pour tout $a, b > 0$

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}$$

Exercice. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+2}\sqrt{k+1}}\right).$$

Indication : Faire apparaître un télescope.