

Colle n°4 : Sujet 1

Question de cours. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, montrer que $|zz'| = |z||z'|$.

Exercice. Déterminer module et argument de

$$z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Exercice. Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

1. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$
2. $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0$.

Colle n°4 : Sujet 3

Question de cours. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité différente de 1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$

Exercice. Simplifier :

1. $j(j+1)$
2. $\frac{j}{j^2+1}$
3. $\frac{j+1}{j-1}$

Exercice. Pour quels $a \in \mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ possède $x = 1$ pour solution ?

Quelles sont alors les autres solutions de l'équation ?

Exercice. Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit réel ? Imaginaire ?

Colle n°4 : Sujet 2

Question de cours. Donner l'inégalité triangulaire dans le cas des nombres complexes. Démontrer la. À quelles conditions à-t-on égalité ?

Exercice. Résoudre l'équation $|z + 1| = |z| + 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des racines n -ème de l'unité.

Calculer

$$\sum_{z \in U_n} |z - 1|$$

Exercice. Résoudre l'équation $4iz^3 + 2(1 + 3i)z^2 - (5 + 4i)z + 3(1 - 7i) = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.