

Colle n°2 : Sujet 1

Question de cours. Rappeler et démontrer les inégalités triangulaires.

Exercice. On note f la fonction $x \mapsto x^2$, g la fonction $x \mapsto x + 1$ et h la fonction $x \mapsto e^x$. Déterminer une expression explicite des fonctions suivantes :

1. $f \circ g \circ h$.
2. $g \circ f \circ h$

Exercice. 1. Montrer que la somme de deux fonctions majorées (resp. bornées) est majorée (resp. bornée).
2. Montrer que le produit de deux fonctions croissantes peut ne pas être une fonction monotone.

Exercice. Combien le polynôme $P = X^5 - 80X + 7$ a-t-il de zéros réels ?

Exercice. Étudier la continuité, la dérivabilité, et la continuité de la dérivée pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Colle n°2 : Sujet 3

Question de cours. Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f, g \in D(I)$. À quoi est égale la dérivée du produit fg ? Montrer cette égalité.

Exercice. Tracer rapidement à main levée, en justifiant, l'allure du graphe des fonctions :

1. $x \mapsto \sqrt{3x-2} - 1$
2. $x \mapsto \frac{5}{2x+1} + 3$

Exercice. Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ tel que $a < b$. Montrer que l'application :

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$$

est strictement croissante.

Exercice. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Colle n°2 : Sujet 2

Question de cours. Soit $X \subset \mathbb{R}$, écrire les définitions, pour $f \in \mathbb{R}^X$, de f est majorée, f est minorée et f est bornée.

Démontrer que f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Exercice. On note f la fonction $x \mapsto x^2$, g la fonction $x \mapsto x + 1$ et h la fonction $x \mapsto e^x$. Déterminer une expression explicite des fonctions suivantes :

1. $h \circ g \circ f$.
2. $f \circ h \circ g$

Exercice. 1. Montrer que le produit de deux fonctions croissantes positives est une fonction croissante.

2. Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut n'être ni croissante ni décroissante.

Exercice. Étudier $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Exercice. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + x^2} \geq 2.$$