

Colle n°10 : Sujet 1

Question de cours. Énoncer et démontrer les caractérisations séquentielles de borne supérieure et inférieure.

Application : Soient la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$ et l'ensemble $A = \{u_n, n \geq 1\}$.

Déterminer la borne sup et la borne inf de A .

Exercice. Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

1. $u_n = (n + 3 \ln n)e^{-(n+1)}$

2. $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$

3. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$

Exercice. Soit (u_n) une suite réelle convergente. Étudier la limite de la suite $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$.

Colle n°10 : Sujet 3

Question de cours. Donner la définition de suite dominée, négligeable et équivalente. Énoncer tous les résultats connus du cours à propos de ces notions.

Exercice. Soient $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}, v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

1. Justifier que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. Déterminer la limite de (S_n) .

3. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) converge.

4. Donner un équivalent simple de (S_n) .

Colle n°10 : Sujet 2

Question de cours. Donner la définition de suites adjacentes. Énoncer et démontrer le théorème important du cours concernant les suites adjacentes.

Énoncer et démontrer le théorème des segments emboîtés. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice. Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ . On pose

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

1. Montrer que (v_n) est croissante.

2. Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.

3. En déduire que $v_n \rightarrow \ell$.

Exercice. Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

1. Montrer que (u_n) converge vers 0^+ .

2. Donner un équivalent simple de (u_n) .