CB 2 : ESCP 2025 (1) + ECRI 2020 (3) + ECRI 2024 (3)

Exercice 1

Dans cet exercice, on souhaite étudier l'évolution d'une population à l'aide de différents modèles mathématiques. On envisage trois situations :

- extinction de la population si sa taille tend vers 0,
- explosion de la population si sa taille tend vers $+\infty$,
- survie de la population si sa taille tend vers un réel strictement positif. Dans ce cas, il y a un équilibre entre les naissances et les décès.

Dans la suite, le temps sera mesuré à l'aide d'un entier naturel n.

Partie I) Division de la population en deux classes d'âge

Dans cette partie, on considère que la population est divisée en deux classes d'âge : les enfants et les adultes. On définit, à tout instant $n \in \mathbb{N}$, la taille de la population des enfants notée u_n et la taille de la population des adultes notée v_n.

On suppose qu'à l'instant initial, u_0 et v_0 sont strictement positifs et que l'évolution de cette population est traduite par le système suivant :

$$u_0 > 0,\ v_0 > 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{2}{3}u_n + v_n, \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{9}u_n + \dfrac{2}{3}v_n. \end{cases} \tag{1}$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & 1 \\ \dfrac{1}{9} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que le polynôme $X^2 - \dfrac{4}{3}X + \dfrac{1}{3}$ est un polynôme annulateur de A.

   (b) En déduire les valeurs propres possibles de A.

   (c) Calculer $A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. En déduire les valeurs propres de A.

2. On définit $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer PQ.

   (b) En déduire que P est inversible et donner une expression matricielle de P^{-1}.

   (c) Calculer AP et PD. En déduire que A est diagonalisable.

   (d) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.

   (e) Déduire de la question (2d) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} & 9 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} & 3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$.

3. On souhaite étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions du système (1). Pour cela, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le système (1), établir un lien entre X_{n+1}, X_n et la matrice A définie à la question 1.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question (2e), déterminer une expression de u_n en fonction de n, u_0 et v_0, puis une expression de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.
   (d) Que peut-on dire de l'évolution de chaque population au bout d'un temps très grand ? Y a-t-il extinction/survie/explosion de la population ?
4. Un zoo dispose d'une base de données composée de deux tables pour suivre l'évolution des différentes espèces d'animaux placés dans des enclos. Chaque espèce est séparée en deux catégories : les enfants et les adultes. Dans un enclos on trouve une seule catégorie d'une espèce d'animal. La base de données a le schéma suivant :
   - `ANIMAUX(Enclos, Espèce, Categorie, Effectif, Quantité)` où
     — `Enclos` : numéro de l'enclos (type entier) ;
     — `Espèce` : espèce de l'animal (type chaîne) ;
     — `Categorie` : adulte ou enfant (type chaîne) ;
     — `Effectif` : nombre d'animaux (type entier) ;
     — `Quantité` : quantité de nourriture à donner en kilogramme (type entier) ;
   - `ALIMENTATION(Espèce, Type, Tarif)` où
     — `Espèce` : espèce de l'animal (clé étrangère vers la table `ANIMAUX`)(type chaîne) ;
     — `Type` : type d'alimentation (type chaîne) ;
     — `Tarif` : prix au kilogramme (type entier).

   (a) Quelle clé primaire peut être choisie pour la table `ANIMAUX` ? Justifier votre réponse.
   (b) Écrire une requête SQL qui renvoie la liste des types d'alimentation à utiliser dans le zoo.
   (c) Écrire une requête SQL donnant la liste des espèces d'animaux dont le nombre d'adultes est supérieur ou égal à 6.
   (d) Écrire une requête SQL donnant la liste de l'espèce et de l'effectif des animaux dont le prix au kilogramme d'alimentation est inférieur strictement à 15.

Partie II) Croissance à taux fixe et croissance logistique

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans sa globalité.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note w_n la taille de la population à l'instant n.
On suppose que la taille w_0 de la population à l'instant initial est strictement positive.

5. Dans cette question uniquement, on suppose que la population possède une croissance à taux fixe, c'est-à-dire qu'elle varie d'un instant à l'autre d'une proportion fixe.
   Mathématiquement, on modélise une telle évolution par la donnée de $w_0 > 0$ et l'existence d' **un réel** $r \in [-1, +\infty[$, tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} - w_n = r w_n.$$
   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de n, r et w_0.
   (b) Pourquoi a-t-on choisi $r \in [-1, +\infty[$ dans cette modélisation ?
   (c) En distinguant les cas $r \in [-1, 0[$, $r = 0$ et $r > 0$, déterminer, si elle existe, la limite de w_n lorsque n tend vers $+\infty$. Que signifie chacune de ces limites pour l'évolution de la population ? Le modèle proposé est-il toujours réaliste ?
6. Dans cette question uniquement, on suppose que la population possède une croissance logistique, prenant en compte l'influence du milieu dans lequel elle vit.
   Mathématiquement, on modélise une telle évolution par la donnée de $w_0 > 0$ et l'existence de **deux réels** $\alpha \in]0, 1[$ **et** $\beta > 0$ tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} - w_n = \alpha w_n \left(1 - \frac{1}{\beta} w_n\right).$$
   On définit les fonctions f et g par :
   $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha x \left(1 - \dfrac{1}{\beta} x\right) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + f(x), \end{array}$$
   de sorte que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = w_n + f(w_n) = g(w_n).$$

(a) i. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

ii. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$ en précisant sa limite en $+\infty$. On fera apparaître les réels obtenus à la question précédente.

(b) i. Résoudre les équations $g(x) = 0$, $g(x) = x$ et $g(x) = \beta$ sur $\mathbb{R}$.

ii. Montrer que :

$$\beta < \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}.$$

iii. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $[0, +\infty[$ en précisant sa limite en $+\infty$. On fera apparaître les réels obtenus à la question 6(b)i.

(c) Étude de la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $w_0 \in]0, \beta]$:
On suppose dans cette question uniquement que $w_0 \in]0, \beta]$.

i. En utilisant le tableau de variations de la fonction g obtenu à la question 6(b)iii, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in [0, \beta]$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $f(w_n)$ à l'aide du tableau de variations de la fonction f obtenu à la question 6(a)ii. En déduire la monotonie de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii. Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée ℓ.

iv. Montrer que $\ell \geqslant w_0$.

v. À l'aide de la question 6(b)i, déterminer la valeur de ℓ en fonction de β. Que signifie ce résultat pour la population étudiée ?

(d) Étude de la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $w_0 \in \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right]$:
On suppose dans cette question uniquement que $w_0 \in \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right]$.

i. Montrer que $g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right) < \frac{\beta}{\alpha}$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right]$.

ii. Étudier la monotonie de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. Que signifie ce résultat pour la population étudiée ?

(e) Étude de la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $w_0 \in \left[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right[$:
On suppose dans cette question uniquement que $w_0 \in \left[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right[$.

i. En utilisant la question (6(b)iii), justifier que $w_1 \in]0, \beta]$.

ii. À l'aide de la question (6c), justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(f) Est-il judicieux de choisir $w_0 \geqslant \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$?

Exercice 3 (probabilités continues)

Un bureau de poste dispose de deux guichets. Trois clients notés A, B, C arrivent en même temps. Les clients A et B se font servir tandis que C attend, puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit les variables aléatoires X, Y, Z égales à la durée en minutes de l'opération des clients A, B et C respectivement lorsqu'ils sont au guichet.
On fixe a et b deux réels strictement positifs, et on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre a, et que Y suit une loi exponentielle de paramètre b. On suppose enfin que X et Y sont indépendantes.

1/ Rappeler l'expression de la fonction de répartition F de X, et donner l'expression d'une densité f de X. Préciser les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

2/ On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente en minutes du client C avant de parvenir à un des guichets. La variable aléatoire T prend donc **la plus petite** des valeurs prises par X et Y.

a/ Expliquer, pour tout réel x, l'égalité :

$$[T > x] = [X > x] \cap [Y > x]$$

b/ Déterminer la probabilité $P(T > x)$.

c/ En déduire que, pour tout réel x :

$$P(T \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-(a+b)x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Reconnaître la loi de T et préciser son(ses) paramètre(s).

d/ Calculer la probabilité que le client C ait à son arrivée à la poste à attendre plus de 5 minutes avant de parvenir au guichet, sachant qu'il sait qu'il attendra déjà au moins 2 minutes.

3/ On suppose que l'on a importé la bibliothèque `numpy` par l'instruction

```
import numpy as np
```

et la sous-bibliothèque `numpy.random` par l'instruction

```
import numpy.random as rd
```

On rappelle que, pour `lambda` un réel strictement positif, l'instruction

```
rd.exponential(1/lambda)
```

renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre `lambda`.

On considère le code PYTHON suivant :

```
def simul(a,b):
    T = np.zeros(10000)
    for k in range(.....):
        X = rd.exponential(1/a)
        Y = rd.exponential(1/b)
        if ..... :
            T[k] = .....
        else:
            T[k] = .....
    return T
```

Compléter le code de la fonction `simul`, de paramètres a et b, pour qu'elle construise une matrice `T` contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire T.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $a = b = \frac{1}{2}$ et on suppose que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle de paramètre 1, la variable aléatoire Z étant indépendante de X et Y. On s'intéresse à $V = T + Z$ qui représente le temps total passé par le client C dans la poste, attente et service compris.

4/ On s'intéresse à la fonction PYTHON suivante :

```
def simul2():
    n = 0
    T = simul(1/2,1/2)
    for k in range(10000):
        Z = rd.exponential(1)
        if T[k]+Z > 2:
                n = n + 1
    return n/10000
```

On lance la fonction `simul2` plusieurs fois de suite, et on obtient les résultats suivants :

`0.4045` `0.4151` `0.4221` `0.4096` `0.4188`

a/ Que retourne la fonction `simul2` ?
On pourra utiliser la définition de la variable aléatoire V.

b/ On constate que les résultats renvoyés sont différents mais relativement proches. Sans démonstration, indiquer quel théorème de probabilité assure ce phénomène.

5/ On admet que V est encore une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a/ À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $A > 0$:

$$\int_0^A g(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-A} - A\mathrm{e}^{-A}$$

b/ Pour tout réel $A > 0$, calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^A xg(x)\,\mathrm{d}x$.

c/ Vérifier que g est bien une densité de probabilité.

d/ Calculer $P(V \leqslant 2)$. En déduire la valeur de $P(V > 2)$.
On donne : $\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}14$. En déduire alors une valeur approchée de $P(V > 2)$.
Le résultat vous semble-t-il cohérent avec les résultats affichés par PYTHON dans la question **4/** ?

e/ Montrer que V admet une espérance et donner sa valeur.

Exercice 3

Partie 1

Dans cette partie, on considère trois suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ définies par la donnée des premiers termes $a_1 = \dfrac{3}{8}$, $b_1 = 0$ et $c_1 = \dfrac{5}{8}$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{2}{11}a_n + \dfrac{3}{11}b_n + \dfrac{3}{11}c_n \\ b_{n+1} &= \dfrac{4}{11}a_n + \dfrac{3}{11}b_n + \dfrac{4}{11}c_n \\ c_{n+1} &= \dfrac{5}{11}a_n + \dfrac{5}{11}b_n + \dfrac{4}{11}c_n \end{cases}$$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n + b_n + c_n = 1$.

On définit trois suites auxiliaires $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(z_n)_{n\geqslant 1}$ par les relations : pour tout entier naturel n non nul,

$$x_n = a_n + b_n + c_n, \qquad y_n = -a_n + 2b_n - c_n \qquad \text{et} \qquad z_n = -5a_n - 5b_n + 7c_n.$$

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
3. (a) Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{11}$.
   (b) Donner pour tout entier naturel n non nul, une expression de y_n en fonction de n.
4. (a) Montrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
   (b) Donner pour tout entier naturel n non nul, l'expression de z_n en fonction de n.
5. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{1}{3}(x_n + y_n)$ et que $c_n = \dfrac{1}{12}(5x_n + z_n)$.
   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de x_n, de y_n et de z_n.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de a_n, de b_n et de c_n en fonction de n.
6. Déterminer les limites de $(a_n)_{n\geqslant 1}$, de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(c_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie 2

Un étang contient 3 goujons, 5 truites et 4 perches. Afin de ne pas vider l'étang, un pêcheur décide d'attraper un premier poisson et de le mettre dans son seau puis, à chaque fois qu'il attrape un poisson, il relâche sa dernière prise afin de placer la nouvelle dans son seau. On suppose qu'à chaque prise, le pêcheur attrape l'un des poissons disponibles dans l'étang avec équiprobabilité.
Cependant, pour le premier poisson pêché, les perches prennent peur lorsque le pêcheur lance sa ligne dans l'eau et elles se réfugient au fond de l'étang, ce qui fait qu'il devient impossible d'en attraper une. Après le premier poisson, les perches s'habituent au pêcheur et peuvent être attrapées comme n'importe quel autre poisson.
Pour tout entier naturel n non nul, on note

- G_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ poisson pêché est un goujon », de probabilité g_n,
- P_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ poisson pêché est une perche », de probabilité p_n,
- T_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ poisson pêché est une truite », de probabilité t_n.

7. Justifier que $g_1 = \dfrac{3}{8}$, $p_1 = 0$ et $t_1 = \dfrac{5}{8}$.
8. (a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{G_1}(G_2)$ et $P_{T_1}(G_2)$.
   (b) En déduire la probabilité que le deuxième poisson attrapé soit un goujon.
9. Sachant que le pêcheur vient d'attraper son deuxième poisson et qu'il s'agit d'un goujon, quelle est la probabilité que le premier poisson pêché soit une truite ?

10. Soit n un entier naturel non nul.
    (a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{G_n}(G_{n+1})$, $P_{P_n}(G_{n+1})$ et $P_{T_n}(G_{n+1})$.
    (b) Donner l'expression de g_{n+1} en fonction de g_n, t_n et de p_n à l'aide de la formule des probabilités totales.
    (c) De même sans les justifier donner une expression de p_{n+1} et de t_{n+1} en fonction de g_n, de t_n et de p_n.
11. À l'aide de la partie 1, en déduire l'expression de g_n, de p_n et de t_n uniquement en fonction de n.

Partie 3

Sur un grand lac, le concours récompense les pêcheurs ayant attrapé le plus de poissons en trois heures. Le lac étant tellement grand qu'on suppose que les chances d'attraper un poisson quel qu'il soit sont identiques et sont indépendantes du nombre de poissons déjà pêchés par les concurrents. Notre pêcheur est sur le lac et se concentre pour faire le plus de prises.

12. On a accès à une base de données SQL répertoriant les espèces de poissons présentes dans le lac sous forme d'une table nommée `poissons` dont le schéma relationnel est le suivant.

`poissons`
<u>`id`</u> : INTEGER `espece` : TEXT `quantite` : INTEGER `taille` : INTEGER `protection` : INTEGER

Chaque enregistrement de la table correspond à une espèce de poissons. Les attributs de la table sont décrits de la manière suivante

- `id` : un numéro permettant d'identifier une espèce
- `espece` : le nom de l'espèce
- `quantite` : le nombre d'individus
- `taille` : la taille moyenne des individus (en mm)
- `protection` : le statut protégé ou non de l'espèce (1 si protégée ; 0 sinon).

(a) Identifier la clef primaire de la table `poissons`.

(b) Une étude du lac a été effectuée et il a été constaté une modification de la taille moyenne des goujons, valant désormais 610 mm.

Écrire une requête SQL permettant de mettre à jour la base de données concernant la taille moyenne des goujons (dont l'attribut `espece` est `"goujon"`).

(c) Écrire une requête SQL permettant d'afficher la liste des poissons que les pêcheurs peuvent pécher, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas protégés et dont la taille moyenne est supérieure ou égale à 125 mm.

13. Dans cette question, on découpe les trois heures en périodes de 20 minutes. Pendant chaque période qu'on supposera indépendante, le pêcheur attrape au plus un poisson et la probabilité d'attraper un poisson est de $1/4$.

(a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire U donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant une période.

(b) Reconnaître la loi de la variable aléatoire V donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant le concours.

(c) Quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille, c'est-à-dire qu'il n'ait attrapé aucun poisson ?

14. Dans cette question, on suppose à présent que le nombre de poissons attrapés par le pêcheur sur toute la durée de l'épreuve est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Rappeler $X(\Omega)$, $P([X = k])$ pour tout $k \in X(\Omega)$, ainsi que l'espérance et la variance de X en fonction de λ.

(b) Quelle valeur faut-il donner à λ pour que le nombre moyen de poissons attrapés par le pêcheur sur les trois heures soit identiques dans les questions 13 et 14 ?

(c) Avec la valeur de λ trouvée précédemment, quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille ?

15. À quelques mètres de sa barque, le pêcheur aperçoit son grand rival. On suppose toujours que le nombre de poissons attrapés par le pêcheur est donné par X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ quelconque. On suppose également que le nombre de poissons attrapés par le rival est donnée par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. À la fin du concours, le pêcheur et son rival ont attrapé 15 poissons à eux deux.

(a) Justifier que $[X+Y = 15] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{15} \left([X = k] \cap [Y = 15-k]\right)$.

(b) Montrer que $P([X+Y = 15]) = \dfrac{1}{15!} \displaystyle\sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \lambda^k \mu^{15-k} e^{-\lambda-\mu}$.

(c) En déduire $P([X+Y = 15])$ en fonction de λ et μ.

(d) Calculer pour tout entier naturel k de $[\![0, 15]\!]$, la probabilité conditionnelle $P_{[X+Y=15]}([X = k])$ en fonction de λ, μ et k.

(e) On admet qu'il existe une variable aléatoire Z telle que

$$\forall k \in [\![0, 15]\!],\ P_{[X+Y=15]}([X = k]) = P([Z = k]).$$

En remarquant que $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} = 1$, reconnaître la loi de Z.

(f) Justifier que $P_{[X+Y=15]}([X \geqslant Y]) = P_{[X+Y=15]}([X \geqslant 8])$.
Exprimer à l'aide d'une somme la probabilité que le pêcheur ait battu son rival en fonction de λ et μ.