FOCUS CONCOURS 22 : 02/04/2025

ESCP BS 2022

Exercice 2

Soit a un réel tel que $0 < a \leqslant 1$. On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a^2} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant a \\[2ex] \dfrac{2a-t}{a^2} & \text{si } a < t \leqslant 2a \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Dans le cas particulier où $a = 1$, tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, en prenant une unité suffisamment grande pour la clarté du dessin.

On revient au cas général où $0 < a \leqslant 1$.

3. (a) Déterminer les valeurs respectives des intégrales $\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^{2a} f(x)\mathrm{d}x$.

   (b) En déduire que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.
4. (a) Montrer que X possède une espérance $E(X)$ et que $E(X) = a$.

   (b) Montrer que X^2 possède une espérance $E\left(X^2\right)$ et que $E\left(X^2\right) = \dfrac{7a^2}{6}$.

   (c) En déduire que X possède une variance $V(X)$ et la déterminer.

5. Dans cette question, on suppose que le paramètre a est inconnu et on souhaite en faire une estimation. À cet effet, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère n variables aléatoires, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, indépendantes, suivant toutes la même loi que X, et on pose $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\overline{X}_n$.

   (b) En déduire que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de a. Quel est son risque quadratique ?
6. On note ε un réel strictement positif.

   (a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\overline{X}_n$, puis établir l'inégalité :

   $$P\left(\left|\overline{X}_n - a\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$

   (b) En déduire l'inégalité :

   $$P\left(\overline{X}_n - \varepsilon \leqslant a \leqslant \overline{X}_n + \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$

   (c) On a réalisé 1000 simulations $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ de la variable aléatoire X. Donner, en fonction de $\overline{X}_{1000}$ et en prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{600}}$, l'intervalle de confiance pour a qui correspond à cette réalisation. Quel est le niveau de confiance de cet intervalle ?