

Exercice 4

Soit a un réel positif.

1. a) Soit x un réel supérieur ou égal à a . Montrer que : $\int_a^x e^{-2t} dt = \frac{1}{2}(e^{-2a} - e^{-2x})$.
- b) En déduire que l'intégrale $\int_a^{+\infty} e^{-2t} dt$ converge et que : $\int_a^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}e^{-2a}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 0$ si $t < a$ et $f(t) = 2e^{2a}e^{-2t}$ si $t \geq a$.

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

Pour permettre des économies d'énergie, l'écran d'un téléphone portable se met en veille automatiquement après un certain temps lorsqu'il n'est pas utilisé. On suppose que le temps en secondes écoulé entre le moment où l'on arrête d'utiliser le téléphone et le moment où l'écran se met en veille est une variable aléatoire X ayant pour densité f . On note F la fonction de répartition de X .

3. a) Montrer que pour tout réel $x < a$ on a : $F(x) = 0$.
- b) En utilisant la question 1.a) calculer $F(x)$ pour tout réel $x \geq a$.
4. On considère la variable aléatoire $Y = X - a$. On note G sa fonction de répartition.
 - a) Montrer que pour tout réel x on a : $G(x) = F(x + a)$.
 - b) En déduire que : $G(x) = 0$ si $x < 0$ et $G(x) = 1 - e^{-2x}$ si $x \geq 0$.
 - c) Reconnaître la loi de Y . Donner son espérance et sa variance.
 - d) En déduire que X admet une espérance et une variance et que $E(X) = \frac{1}{2} + a$ et $V(X) = \frac{1}{4}$.
5. On suppose que le réel a est inconnu et on souhaite estimer sa valeur. Pour cela on calcule n fois le temps écoulé entre le moment où on arrête d'utiliser notre téléphone et le moment où l'écran se met en veille. On note $X_1, \dots, X_n$ chacun de ces temps. On suppose que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi que X .

On pose $Z_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

- a) Calculer $E(Z_n)$. En déduire que Z_n est un estimateur sans biais de a .
- b) Montrer que $V(Z_n) = \frac{1}{4n}$. En déduire la valeur du risque quadratique de Z_n .
- c) On suppose que $n = 1000$ et que les valeurs de $X_1, \dots, X_{1000}$ ont été entrées dans une matrice $X = [X(1), \dots, X(1000)]$.

On rappelle que la valeur moyenne des coefficients de la matrice ligne X s'obtient avec l'instruction `np.mean(X)`.

Quelle instruction faut-il écrire pour obtenir une estimation de a ?