

EXERCICE 4

Dans tout l'exercice, on note f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$\forall t \geq 0, g(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

- On note g' la dérivée de la fonction g . Pour tout réel $t \geq 0$, calculer $g'(t)$.
- Pour tout $x \geq 0$, on pose : $I(x) = \int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$. Déduire de la question précédente la valeur de $I(x)$.
- Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé, telle que $X(\Omega) = \mathbf{R}_+$ et admettant f comme densité.

2. On note F la fonction de répartition de X . Établir la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. On pose $Y = \frac{X^2}{1+X^2}$ et on note G la fonction de répartition de la variable aléatoire Y .

- Étudier les variations de la fonction Q qui, à tout réel $x \geq 0$, associe $Q(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, puis déterminer $Y(\Omega)$.
- Pour tout $y \in [0, 1[$, calculer $G(y)$ et en déduire que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$.
- Vérifier que $X = \sqrt{\frac{Y}{1-Y}}$, puis compléter à l'aide de la commande `rd.random()`, le script suivant afin qu'il simule la variable aléatoire X .

`Y=.....`

`X=.....`

4. Pour tout réel $h > 0$, soit T_h la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{\{X > x\}}([X \leq x+h]).$$

- Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que l'on a : $\lim_{h \rightarrow 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$.
- Pour tout réel $x > 0$, on pose : $T(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$. Déterminer explicitement $T(x)$.
- Pour tout réel $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^x T(t) dt$ et exprimer cette intégrale en fonction de $F(x)$.