FOCUS CONCOURS 19 : 12/03/2025

BSB 2020

Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à $[0;1]$ on a : $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$.

   b) En déduire que $I_1 = 1 - \ln(2)$.

   c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

   d) En déduire la valeur de I_2 puis celle de I_3.

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = k\frac{t}{1+t} \quad \text{si } t \in [0;1] \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

2. En utilisant l'un des calculs de la question 1 déterminer la valeur qu'il faut donner à k pour que f puisse être une densité de probabilité. Vérifier que pour cette valeur de k la fonction f est bien une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice on suppose que k est la valeur trouvée à la question 2 et que X est une variable aléatoire ayant f pour densité. On note F sa fonction de répartition.

3. a) Calculer $F(x)$ lorsque $x < 0$ et lorsque $x > 1$.

   b) Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $F(x) = k(x - \ln(1+x))$.

4. a) En utilisant l'un des calculs de la question 1 justifier que X admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1 - \ln(2)}$$

   b) En utilisant l'un des calculs de la question 1 justifier que X admet une variance et calculer $V(X)$. On ne demande pas de simplifier l'expression de $V(X)$.