Fiche 9 d'exercices : Espaces vectoriels

1 Exercices d'assimilation du cours

Exercice 1 (Etre ou ne pas être un sous-espace vectoriel)

1) Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 1\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xy = 0\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (Sous-espaces vectoriels et familles génératrices)

Soient $F_1 = \left\{(\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$, $F_2 = \left\{(\lambda - 3\mu, 2\mu, \lambda + \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$, $F_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\right\}$ et $F_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0 \,\text{et}\, 2x + 5y + z = 0\right\}$.
Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ et en donner dans chaque cas une famille génératrice.

Exercice 3 (Famille génératrice)

Soient $u = (1, 1, 3)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (2, 1, 1)$.
Montrer que (u, v, w) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 (Famille libre, famille liée)

1) Soient $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (3, 5, 5)$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre.
2) Soient $u = (1, -1, 1)$, $v = (14, -2, 5)$ et $w = (4, 0, 1)$. Montrer que la famille (u, v, w) est liée.

Exercice 5 (Famile libre, famille génératrice)

Soient $u = (1, -1, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (-1, -1, 2)$.
1) La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2) La famille (u, v, w) est-elle génératrice ?

Exercice 6 (Famile libre, famille génératrice)

Soient $u = (2, 1, 3)$, $v = (0, -1, -1)$ et $w = (2, -1, 1)$.
1) La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2) La famille (u, v, w) est-elle génératrice ?

Exercice 7 (Base)

Soient $u = (2, 0, -1)$, $v = (2, 1, 3)$ et $w = (0, 1, 2)$.
Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Précisez les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) dans cette base.

Exercice 8 (Base d'un sous-espace vectoriel)

1) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y \,\text{et}\, z = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
3) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$.
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

Exercice 9 (Famile libre, famille génératrice, dimension finie)

Soient $u = (1, 1, 1)$ et $v = (2, 0, -2)$.
1) La famille (u, v) est-elle libre ?
2) La famille (u, v) est-elle génératrice ?

Exercice 10 (Famile libre, famille génératrice, dimension finie)

Soient $t = (1, 0, 2)$, $u = (-1, 3, -1)$, $v = (2, 1, 1)$ et $w = (3, 2, -1)$.
1) La famille (t, u, v, w) est-elle libre ?
2) La famille (t, u, v, w) est-elle génératrice ?

Exercice 11 (Egalité de sous-espaces vectoriels, dimension finie)

Soient $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.
1) La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2) Soit $F = \text{Vect}(u, v, w)$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u, v et w.
Donner une base de F.
3) a) Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$.
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3) b) Donner une base de G.
3) c) Montrer de deux façons que $F = G$.
4) En considérant G, compléter la famille (u, v) en une base de $\mathbb{R}^3$.

2 Exercices d'entraînement

Exercice 12 (Etre ou ne pas être un sous-espace vectoriel)

Déterminer parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$.
2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$.
3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$.
4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$.
5) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - 6y = 0\}$.

Exercice 13 (Sous-espace vectoriel)

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y - z = 0\}$.
Montrer de deux façons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14 (Sous-espace vectoriel)

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0 \text{ et } 2x + 3y + z = 0\}$.
Montrer de deux façons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15 (Egalité de sous-espaces vectoriels)

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.
Soient $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$.
1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels.
2) Montrer que $F = G$.

Exercice 16 (Familles libres)

1) Montrer que la famille $((2, 5))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que la famille $((1, 2, 3), (0, 1, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
3) Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ et $w = (1, 1, 0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 17 (Famille liée)

Montrer que la famille $((1, 2, 3), (4, 8, 12))$ est liée.

Exercice 18 (Famille liée)

Soient $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 2, 1)$ et $w = (3, -4, -3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que la famille (u, v, w) est liée.

Exercice 19 (Famille génératrice)

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3y - z = 0\}$.
1) Montrer que la famille $((1, 0, 0), (0, 1, 3))$ est génératrice de F.
2) Montrer que la famille $((1, 0, 0), (0, 1, 3))$ est une base de F.

Exercice 20 (Base)

1) Montrer que la famille $((1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3), (1, 2, 0, 3), (0, 1, 0, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ en montrant qu'elle est libre est génératrice.
2) Montrer que la famille $((1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3), (1, 2, 0, 3), (0, 1, 0, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ en montrant que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de ces vecteurs.

Exercice 21 (Base)

Soient $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 0, 3)$ et $w = (0, 1, 1)$. On admet que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Donner les coordonnées du vecteur $t = (-1, 10, 1)$ dans cette base.

Exercice 22 (Dimension d'un sous-espace vectoriel)

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y \,\text{et}\, z = 0\}$.
1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel.
2) Déterminer la dimension de F.

Exercice 23 (Dimension d'un sous-espace vectoriel)

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ tel que $F \neq \{0\}$ et $(1, 2) \notin F$.
Déterminer la dimension de F.

Exercice 24 (Famille liée, dimension finie)

Montrer que la famille $((1, 0, -2, 5), (7, -4, 3, 1), (0, 1, -1, 0), (1, -3, 0, 2), (1, 0, 1, 1))$ est liée.

Exercice 25 (Base, dimension finie)

Montrer que la famille $((1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3), (1, 2, 0, 3), (0, 1, 0, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ en utilisant un argument reposant sur la dimension de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 26 (Egalité de sous-espaces vectoriels, dimension finie)

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.
Soient $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$.
1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels.
2) Montrer que $F = G$ en utilisant un argument de dimension.