Fiche 8 d'exercices : Probabilités sur un univers fini

1 Exercices d'assimilation du cours

Exercice 1 (Il est interdit de compter les cartes...)

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 piques et 4 rois.
1) Combien y a-t-il de cartes qui sont des rois ou des piques ?
2) Combien y a-t-il de cartes qui ne sont ni des rois, ni des piques ?

Exercice 2 (Nombre de fonctions d'un ensemble vers un autre)

Soient $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à 3 éléments et $F = \{1, 2\}$ un ensemble à deux éléments. Lister toutes les applications de E vers F.

Exercice 3 (Ramenez la coupe à la maison... Allez les bleus ! Allez !)

Dans une grille de loto foot, on peut parier sur 14 matches. A chaque match, on choisit entre 1 (pour victoire de la première équipe citée), N (pour match nul) ou 2 (pour victoire de la deuxième équipe citée). Combien y a-t-il de grilles de loto foot possibles ?

Exercice 4 (PMU, PMU, PMU)

Une course de chevaux est constituée de 18 partants. On suppose qu'il n'y a pas d'exæquo et que tous les chevaux sont à l'arrivée. Combien y a-t-il de tiercés possibles (nombre de possibilités d'arrivée des trois premiers chevaux) ?

Exercice 5 (Dénombrement d'anagrammes)

1) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « élève » ?
2) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « eleve » ?
3) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « mathématiques » ?

Exercice 6 (Le jeu du loto)

On joue au loto en cochant dans une grille 6 numéros parmi les numéros $1, 2, \ldots, 49$. On place ensuite 49 boules numérotées de 1 à 49 dans une urne et on en extrait 6. On obtient ainsi les numéros gagnants.
1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2) Combien de tirages nous fournissent exactement un numéro gagnant ?
3) Combien de tirages nous fournissent exactement $2, 3, 4, 5, 6$ numéros gagnants ?

Exercice 7 (Dénombrement de chemins)

Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut.
Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 8 (Preuves combinatoires d'identités binomiales)

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver une démonstration combinatoire de l'identité : $\displaystyle\sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}((n-1)/2)} \binom{n}{2p+1}$.

Autrement dit, démontrer qu'un ensemble à n éléments contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

2) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Trouver une démonstration combinatoire de l'identité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 9 (Etude d'un jeu de cartes)

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On distribue 5 cartes à un joueur.
1) Combien de mains contiennent exactement un roi ?
2) Combien de mains contiennent exactement deux piques ?
3) Combien de mains contiennent exactement deux piques et deux cœurs ?
4) Combien de mains contiennent au moins deux carreaux ?
5) Combien de mains contiennent exactement un roi et deux trèfles ?

Exercice 10 (Le poker : « Ce qui compte, ce n'est pas les cartes, c'est ce que vous en faites ! »)

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On distribue 5 cartes à un joueur. L'ordre des cartes est : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8 et 7, soit un total de 8 hauteurs. Il y a quatre couleurs : carreau, cœur, pique et trèfle. On rappelle les combinaisons possibles :
• quinte flush royale : As, Roi, Dame, Valet, 10 de la même couleur,
• quinte flush : 5 cartes consécutives de la même couleur ne constituant pas une quinte flush royale,
• carré : 4 cartes d'une même hauteur et une autre carte,
• full : 3 cartes d'une même hauteur et deux autres d'une même hauteur,
• couleur : 5 cartes d'une même couleur ne constituant pas une quinte flush ou une quinte flush royale,
• suite : 5 cartes consécutives ne constituant pas une quinte flush ou une quinte flush royale,
• brelan : 3 cartes d'une même hauteur et deux autres cartes ne constituant pas un full,
• double paire : 2 cartes d'une même hauteur, 2 autres cartes d'une même hauteur et une $5^{\text{ième}}$ carte différente des précédentes,
• paire : 2 cartes d'une même hauteur et 3 autres cartes différentes.
1) Combien de mains différentes le joueur peut-il recevoir ?
2) Combien de mains contiennent une quinte flush royale ?
3) Combien de mains contiennent une quinte flush ?
4) Combien de mains contiennent un carré ?
5) Combien de mains contiennent un full ?
6) Combien de mains contiennent une couleur ?
7) Combien de mains contiennent une suite ?
8) Combien de mains contiennent un brelan ?
9) Combien de mains contiennent une double paire ?
10) Combien de mains contiennent une paire ?

Exercice 11 (Description d'événements)

On lance un dé cubique à 6 faces. On associe à cette expérience aléatoire l'univers fini $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ constitué des 6 résultats possibles. Décrire les événements suivants.
1) A_1 : « On obtient un numéro pair ». 2) A_2 : « Le numéro obtenu est strictement plus petit que 2 ».
3) A_3 : « Le numéro obtenu est inférieur ou égal à 6 ». 4) A_4 : « Le numéro obtenu est négatif ».

Exercice 12 (Calcul de probabilité)

On lance un dé cubique à 6 faces. Ce dé est pipé. Le 1 a une chance sur 2 d'être obtenu et les 5 autres numéros ont tous la même probabilité d'être obtenus. Calculer la probabilité d'obtenir un numéro impair.

Exercice 13 (Formule des probabilités composées)

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :
- si au temps n, la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$, elle passe à l'état 2 avec une probabilité $1/2$,
- si au temps n, la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $1/4$.

On note A_n l'événement « Au temps n, la particule est à l'état 1 » et T_n l'événement « La première fois que la particule est à l'état 1 est le temps n ».
On note p_n la probabilité de l'événement A_n et on suppose que $p_0 = 1/2$.
1) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n en fonction de n.
2) Calculer $P(T_0)$ et $P(T_1)$ puis $P(T_n)$ pour $n \geq 2$.

Exercice 14 (Formule de Bayes)

Dans une population donnée, un individu peut être atteint d'une certaine maladie (événement M) ou pas. On fait un test de dépistage sur un individu et le test peut être positif (événement T) ou pas.
On suppose que 10 % de la population est constituée de personnes malades, que 93 % des personnes malades ont un test positif et que 97 % des personnes non malades ont un test négatif.
Calculer la probabilité d'être malade sachant que l'on a obtenu un test positif.

Exercice 15 (Formule de Bayes)

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $1/2$.
1) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 16 (Evénements indépendants)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $A, B_1, \ldots, B_n$ des événements tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A et B_k sont indépendants et de plus, les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont deux à deux incompatibles.
Montrer que les événements A et $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ sont indépendants.

2 Exercices d'entraînement

Exercice 17 (Un peu de dénombrement)

Soit $N \geq 2$. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On pioche successivement et avec remise N boules dans l'urne. A chaque boule tirée, on note le numéro de la boule obtenue.
On obtient ainsi une séquence de N nombres indiquant les numéros des boules tirées.
Par exemple, si $N = 4$ et que l'on tire la 1, puis la 3, puis la 2, puis la 1, on a la séquence : 1, 3, 2 et 1.
On note A l'événement : « On obtient une séquence de nombres rangés dans un ordre strictement décroissant ».
1) Déterminer le nombre d'issues possibles de l'expérience.
2) Déterminer le nombre d'issues telles que A soit réalisé.

Exercice 18 (Un peu de dénombrement)

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On tire p boules avec remise dans l'urne ($p \geq 2$) et on note à chaque fois le numéro obtenu.
Combien y a-t-il d'issues possibles de l'expérience ?

Exercice 19 (Un peu de dénombrement)

Un sac contient 26 jetons sur lesquels sont inscrites les lettres de l'alphabet (une par jeton). On pioche simultanément 3 jetons.
Déterminer le nombre de tirages pour lesquels on pioche deux voyelles.

Exercice 20 (Un peu de dénombrement)

Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne.
1) Quel est le nombre de tirages possibles tels que deux boules blanches et deux boules noires soient tirées ?
2) Quel est le nombre de tirages possibles tels qu'au moins une boule blanche soit tirée ?

Exercice 21 (Un peu de dénombrement)

On range au hasard 7 chemises numérotées de 1 à 7 dans 5 tiroirs a, b, c, d et e.
Combien y a-t-il d'issues telles que l'événement B : « Les 7 chemises sont dans deux tiroirs exactement » soit réalisé ?

Exercice 22 (Calcul de probabilité)

Soit $n \geq 2$. Sur la piste de danse, n couples (n hommes, n femmes) dansent ensemble, puis sont séparés à la fin de la première danse. Pour la deuxième danse, on forme au hasard n couples avec les n hommes et les n femmes.
Quelle est la probabilité que tous les couples initiaux soient reconstitués pour la deuxième phase ?

Exercice 23 (Calcul de probabilité)

On joue au jeu suivant : on fait tourner deux roues, on a une chance sur deux de gagner à la première et une chance sur quatre de gagner à la deuxième (les deux lancers de roue sont indépendants). Si on gagne aux deux roues, on gagne 100 euros, sinon on perd 50 euros.
Pour $n \geq 2$, quelle est la probabilité que les n premières personnes jouant à ce jeu gagnent ?

Exercice 24 (Calcul de probabilité)

On dispose d'une urne contenant b boules blanches et r boules noires ($b \geq 2$ et $r \geq 2$).
On tire n boules successivement dans l'urne ($n \geq 2$). Après chaque tirage, on remet la boule tirée si elle est noire et on ne la remet pas si elle est blanche.
On note pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, B_i l'événement : « Toutes les boules tirées sont noires, sauf la $i^{\text{ième}}$ boule tirée qui est blanche ».
On admet que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(B_i) = \dfrac{r^{n-1}b}{(b+r)^i(b+r-1)^{n-i}}$.
Déterminer la probabilité d'obtenir une unique boule blanche en n tirages.

Exercice 25 (Calcul de probabilité)

On lance une pièce équilibrée trois fois.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pile au cours des trois lancers ?

Exercice 26 (Inégalité à partir de probabilités)

On tire au sort une carte dans un paquet contenant 10 cartes blanches, 20 cartes noires et 40 cartes vertes.
• Si on tire au sort une carte noire, on a perdu.
• Si on tire au sort une carte blanche, on a gagné.
• Si on tire au sort une carte verte, on lance un dé à 6 faces non truqués et on gagne si on fait 5 ou 6, sinon on perd.
Montrer qu'on a plus de chance de perdre le jeu que de le gagner.

Exercice 27 (Inégalité à partir de probabilités)

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements ($n \geq 2$).
Montrer que : $1 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(A_k) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 28 (Formule des probabilités composées)

Soit $(n, a, b) \in (\mathbb{N}^*)^3$. On effectue dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires une suite de tirages de la façon suivante : si les $k-1$ premiers tirages ont tous donnés une boule blanche, on procède au $k^{\text{ième}}$ tirage, et alors :
- si la boule obtenue est noire, ce $k^{\text{ième}}$ tirage est le tirage final,
- si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec en plus a autres boules blanches.
On note A_n l'événement : « Une boule blanche apparaît à chacun des n tirages ».
Montrer que : $P(A_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka+b}{ka+2b}$.

Exercice 29 (Formule des probabilités totales)

Soit $n \geq 2$. On dispose de n dés. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le $k^{\text{ième}}$ dé est un dé non truqué à k faces numérotées de 1 à k. Un lancer est considéré comme gagné s'il tombe sur 1.
1) On enlève au hasard un des n dés, puis on lance les $n-1$ restants. On observe alors les $n-1$ résultats. On note T l'événement : « On gagne les $n-1$ lancers ». Déterminer $P(T)$.
2) On lance cette fois tous les dés l'un après l'autre.
Quelle est la probabilité de gagner au moins deux lancers de dés ?

Exercice 30 (Formule des probabilités totales)

On considère N urnes $U_1, \ldots, U_N$ ($N \geq 2$). Pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, l'urne U_j contient j boules blanches et $N+1-j$ boules noires. Soit $1 \leq n \leq N$. On tire simultanément n boules d'une urne prise au hasard.
Calculer la probabilité p d'obtenir n boules blanches.

Exercice 31 (Formule de Bayes)

Au concours d'entrée à HEC, on sait qu'un étudiant sur cent vient d'une prépa privée. A l'issue de ce concours, on constate qu'un étudiant sur trente ayant intégré l'école vient du privé. De plus, on sait qu'un étudiant sur vingt issu d'une prépa publique a intégré. Quelle est la probabilité d'intégrer HEC lorsqu'on est issu du privé ?

Exercice 32 (Formule de Bayes)

On dispose de 100 dés à 6 faces dont 20 dés sont truqués de telle sorte que le 1 apparaît avec une probabilité 1/2. On prend un dé au hasard et on le jette.
Quelle est la probabilité d'avoir tiré un dé truqué sachant qu'on a obtenu le numéro 1 ?

Exercice 33 (Formule de Bayes)

Supposons qu'on dispose d'un test sérologique permettant de savoir si un individu donné a été atteint par le covid-19. On dispose des données suivantes.
• 5 % de la population a été atteinte par le covid-19.
• Le test est fiable à 95 %, c'est-à-dire que 95 % des personnes qui ont été atteintes par le virus présentent un test positif et 95 % de celles qui ne l'ont pas été présentent un test négatif.
Calculer la probabilité pour un individu donné d'avoir été effectivement atteint sachant qu'il a été testé positif.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 34 (Evénements indépendants)

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 1/5$ et $P(A \cup B) = 1/3$.
Pour quelle valeur de $P(B)$ les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 35 (Evénements indépendants)

Soient A et B deux événements tels que : $P(\overline{A \cup B}) = (1 - P(A))(1 - P(B))$.
Montrer que les événements A et B sont indépendants.