Fiche 17 d'exercices : Réduction des matrices carrées

1 Exercices d'assimilation du cours

Exercice 1 (Recherche de valeurs propres à l'aide de vecteurs propres)

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M et préciser les valeurs propres associées.

Exercice 2 (Recherche de valeurs propres à l'aide de systèmes)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix}$.
Les réels 2 et 3 sont-ils valeurs propres de A ? Si oui, déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre correspondante.

Exercice 3 (Recherche de valeurs propres à l'aide d'un polynôme annulateur)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 - x$ est un polynôme annulateur de A.
2) En déduire les valeurs propres possibles de A.
3) Déterminer lesquelles sont bien des valeurs propres de A.

Exercice 4 (Inverse d'une matrice obtenue à l'aide d'un polynôme annulateur)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de M.
2) En déduire que M est inversible et donner son inverse.

Exercice 5 (Réduction de deux matrices classiques)

Soit $n \geq 2$.
1) Déterminer les éléments propres de la matrice J_n dont tous les éléments sont égaux à 1.
2) Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice réelle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent a et les autres valent b.

2 Exercices d'entraînement

Exercice 6 (Recherche de valeurs propres à l'aide de systèmes)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Montrer que les réels 3 et 7 sont valeurs propres de A et donner un vecteur propre associé à chacune de ces valeurs propres.

Exercice 7 (Recherche de valeurs propres à l'aide d'un polynôme annulateur)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $2A^3 - 3A^2 + A$.

2) En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

3) Déterminer lesquelles sont effectivement valeurs propres et trouver des vecteurs propres associés.

Exercice 8 (Polynôme annulateur, diagonalisabilité d'une matrice d'ordre 2)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier l'égalité $M^2 - M - 6I_2 = 0_2$ et en déduire les valeurs propres possibles de M.

2) Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de M et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.

3) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible.

4) On pose $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier l'égalité $MP = PD$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9 (Polynôme annulateur, diagonalisabilité d'une matrice d'ordre 3)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que le polynôme $x^3 - 3x^2 + 4$ est un polynôme annulateur de A et en déduire les valeurs propres possibles de A.

2) Soient les trois matrices colonnes $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que V_1, V_2 et V_3 sont trois vecteurs propres de A et préciser pour chacun d'eux la valeur propre associée.

3) On note P la matrice dont la première colonne est V_1, la deuxième est V_2 et la dernière est V_3. Calculer $P^3 - 3P^2 + 5P - 3I_3$. En déduire que P est inversible et donner une expression de P^{-1} en fonction de I_3, P et P^2.

4) Vérifier l'égalité $AP = PD$, où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5) En déduire que A est diagonalisable.

3 Exercices d'approfondissement

Exercice 10 (Application de la diagonalisabilité à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par les trois premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = -2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_n - 11u_{n+1} + 6u_{n+2}.$$

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $MX_n = X_{n+1}$.
En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.
2) a) Calculer $(M - I_3)(M - 2I_3)(M - 3I_3)$ puis en déduire les valeurs propres possibles de la matrice M.
2) b) Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de M et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
3) a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer PQ.
En déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
3) b) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $MP = PD$.
3) c) La matrice M est-elle diagonalisable ?
4) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.
4) b) En déduire, pour tout entier naturel n, les coefficients de la première ligne de M^n.
Donner alors l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 11 (Application de la diagonalisabilité à l'étude d'un système de trois suites récurrentes)

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n \end{cases}.$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
1) b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.
2) a) Vérifier que le polynôme $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$ est annulateur de A.
En déduire les valeurs propres possibles de A.
2) b) Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de A et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
3) a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner son inverse.
3) b) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $AP = PD$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, puis donner l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier n.
5) En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de u_n, v_n et w_n.