Fiche 14 d'exercices : Variables aléatoires discrètes

1 Exercices d'assimilation du cours

Exercice 1 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$P(X = x_i)$	$0,10$	$0,35$	0.15	$0,25$	$0,15$

1) Déterminer la fonction de répartition de X puis tracer sa courbe représentative.
2) Calculer $P(X < 0)$, $P(-3,5 < X \leq -2)$ et $P(-3,5 < X < -2)$.

Exercice 2 (Loi de probabilité d'une fonction d'une variable aléatoire)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$P(X = x_i)$	$0,10$	$0,35$	0.15	$0,25$	$0,15$

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire $|X|$.
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X^2 + X - 2$.
3) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X, 1)$.
4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\max(X, -X^2)$.

Exercice 3 (Loi conjointe et lois marginales)

On lance simultanément deux dés équilibrés à six faces. On note X le plus petit des nombres obtenus et Y le plus grand des nombres obtenus.
1) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2) Déduire de la question précédente les lois marginales.

Exercice 4 (Loi conjointe et lois marginales)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles prenant leurs valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On suppose que la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

X / Y	0	1	2
0	p	p/2	p/4
1	2p	p	p/2
2	4p	2p	p

1) Pour quelle valeur de p ce tableau représente-t-il effectivement la loi d'un couple ?
2) Déterminer les lois marginales.

Exercice 5 (Espérance d'une variable aléatoire)

Deux joueurs A et B lancent deux pièces de monnaie. Si les deux pièces tombent sur pile, A gagne. Sinon, B gagne 2 euros. Combien doit gagner A pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 6 (Espérance d'une variable aléatoire)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On considère une variable aléatoire réelle X prenant ses valeurs dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$ et dont la loi est de la forme : $\forall k \in [\![1, n]\!], P(X = k) = \lambda k$.
Déterminer λ puis calculer $E(X)$.

Exercice 7 (Loi de Bernoulli)

Quelle est la valeur maximale de l'écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli ?

Exercice 8 (Loi de Bernoulli)

Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.
Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 9 (Lois usuelles)

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par les joueurs sur une partie.
a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
a) Déterminer la loi de X.
b) Déterminer la loi de Y.

2 Exercices d'entraînement

Exercice 10 (Loi usuelle)

Un joueur lance n fois ($n \geq 2$) un dé équilibré à 6 faces. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le dé tombe sur 5 au cours des n lancers. Déterminer la loi de X.

Exercice 11 (Loi usuelle)

Deux joueurs s'affrontent à un jeu de hasard. Le jeu comprend plusieurs parties. A chaque partie, le joueur 1 a une probabilité $p \in [0, 1[$ de gagner. Après chaque partie, si le joueur 1 a gagné, le jeu continue. Mais dès que le joueur 1 perd, le jeu s'arrête. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties durant le jeu.
Déterminer la loi de X.

Exercice 12 (Loi usuelle)

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z}^*, P(X = k) = \dfrac{1}{2e(|k|)!} \\ P(X = 0) = \dfrac{1}{e} \end{cases}.$$

On pose $Y = |X|$. Montrer que Y suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

Exercice 13 (Loi de variables aléatoires)

Soit $n \geq 2$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On pioche deux fois une boule avec remise dans l'urne.
On note X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si on pioche la boule 1 au 1^{ier} tirage et prenant la valeur 0 sinon.
On note Y la variable aléatoire prenant la valeur 1 si on pioche deux boules ayant des numéros identiques au cours des deux tirages et prenant la valeur 0 sinon.
Montrer que X et Y ont même loi.

Exercice 14 (Une réécriture de l'espérance)

Soit $N \geq 1$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.
Etablir la relation suivante : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} P(X > k)$.

Exercice 15 (Calcul d'espérance)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p \leq 1$.
Déterminer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 16 (Calcul d'espérance)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.
On pose $Y = (X - 1)(X + 1)$. Montrer que : $E(Y) = np(1 - p + np) - 1$.

Exercice 17 (Calcul de variance)

Une puce se déplace sur une ligne composée de cases numérotées. Elle part de la case numéro 0 (la ligne contient à la fois des cases aux numéros négatifs et des cases aux numéros positifs). Elle effectue n sauts ($n \in \mathbb{N}^*$) de la manière suivante : à chaque saut, elle a une probabilité $p \in [0, 1]$ d'avancer d'une case et une probabilité $q = 1 - p$ de reculer d'une case.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la case sur laquelle la puce se situe après le $n^{\text{ième}}$ saut.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a avancé d'une case.
1) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2) En déduire la variance de X.

3 Exercices d'approfondissement

Exercice 18 (Loi de probabilité d'une variable aléatoire)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.
1) Déterminer la loi de X.
2) Déterminer la loi de Y.

Exercice 19 (Minimum de variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. Soient N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.
1) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.
2) On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leq i \leq N} X_i$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)).$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.
b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E[Y]$.

Exercice 20 (Variable aléatoire indexée par une variable aléatoire)

On s'intéresse à un livreur de pizzas recevant les commandes par téléphone. Le nombre de commandes en une journée est une variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Si $N = n$, le nombre de commandes pour lesquelles le livreur ne se trompe pas d'adresse est S_n. A chaque commande, la probabilité que le livreur trouve l'adresse est $p \in [0,1]$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, N est indépendant de S_n.
1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de S_n ?
2) A l'aide de la formule des probabilités totales, calculer la loi de S_N, c'est-à-dire la loi du nombre de livraisons effectuées à la bonne adresse dans une journée.

Exercice 21 (Espérance d'une variable aléatoire)

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.
1) Préciser les valeurs prises par X.
2) a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
2) b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3) a) Calculer $E(X)$.
3) b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.