Fiche 13 d'exercices : Intégration sur un segment

1 Exercices d'assimilation du cours

Exercice 1 (Calcul d'intégrale à l'aide d'une primitive)

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $\displaystyle\int_1^2 x^n \mathrm{d}x$.

Exercice 2 (Application de la linéarité)

1) Montrer que : $\forall t > 0, \dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$.

2) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} \mathrm{d}t$.

Exercice 3 (Application de la linéarité)

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1[, \displaystyle\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.

Exercice 4 (Application de la relation de Chasles)

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^3 e^{-|x|} \mathrm{d}x$.

Exercice 5 (Nullité d'une fonction continue positive d'intégrale nulle)

Soit P un polynôme tel que $\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t = 0$.

Montrer que P est le polynôme nul.

Indication : Si P est un polynôme possédant une infinité de racines, alors $P = 0$.

Exercice 6 (Encadrement d'intégrale)

Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t} \mathrm{d}t \leq -\ln(1-x)$.

Exercice 7 (Encadrement d'intégrale)

On note : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n}{1+t} \mathrm{d}t$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |I_n| \leq \ln(2)$.

Exercice 8 (Encadrement d'intégrale)

Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) \mathrm{d}x.$$

Exercice 9 (Etude des variations d'une suite définie par une intégrale)

Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1} \mathrm{d}x.$$

Exercice 10 (Calcul d'intégrale par intégration par parties)

Calculer $\int_0^1 x^2 e^x \mathrm{d}x$.

Exercice 11 (Calcul d'intégrale par intégration par parties)

On définit : $\forall k \geq 2, v_k = \int_0^1 (\ln(k) - \ln(k-u)) \mathrm{d}u$.

Montrer que : $\forall k \geq 2, v_k = \frac{1}{2}(\ln(k) - \ln(k-1)) - \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u} \mathrm{d}u$.

Exercice 12 (Calcul d'intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^n \lfloor x \rfloor \mathrm{d}x$.

2 Exercices d'entraînement

Exercice 13 (Recherche de primitives)

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f.

1) $f(x) = x^2 + x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = e^{2x} + e^{-x} + \dfrac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

3) $f(x) = (2x-1)(2x^2-2x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

4) $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

5) $f(x) = \dfrac{x}{3+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

6) $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (Calculs d'intégrales à l'aide d'une primitive)

Calculer les intégrales suivantes.

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\mathrm{d}x$.

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^2 (e^{2x} + e^{-x})\mathrm{d}x$.

3) $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

4) $I_4 = \displaystyle\int_{-2}^{-1} (4x-1)^3\mathrm{d}x$.

5) $I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1+3x^2}\mathrm{d}x$.

6) $I_6 = \displaystyle\int_0^1 e^{2x-1}\mathrm{d}x$.

Exercice 15 (Calculs d'intégrales à l'aide d'une intégration par parties)

Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties.

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\mathrm{d}x$.

2) $I_2 = \displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)\mathrm{d}x$.

3) $I_3 = \displaystyle\int_1^4 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

4) $I_4 = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)e^{3x}\mathrm{d}x$.

Exercice 16 (Calculs d'intégrales à l'aide d'une intégration par parties)

Calculer les intégrales suivantes : $I_1 = \int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_1^3 \ln(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 17 (Etude d'une suite d'intégrales)

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0.
2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
2) b) En déduire les valeurs de I_1, I_2 et I_3.
3) a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3) b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $x^n \leq x^n e^x \leq e \times x^n$.
4) b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
4) c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18 (Etude d'une suite d'intégrales)

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

1) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$.
2) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$ puis en déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
3) Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = 1$.
5) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = nI_n$.
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$.
b) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq \ln(1+t) \leq t$.
c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 Exercices d'approfondissement

Exercice 19 (Calculs d'intégrales)

L'objectif de cet exercice est de calculer les trois intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\mathrm{d}x.$$

1) <u>Calcul de I :</u>

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.
a) Calculer la dérivée de f.
b) En déduire la valeur de I.

2) <u>Calcul de J et de K :</u>

a) Sans calculer explicitement les intégrales J et K, vérifier que $J + 2I = K$.
b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
c) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 20 (Comparaison série-intégrale)

1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2) En déduire que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

3) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$.

4) On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = 1$. On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équivalente à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 21 (Comparaison série-intégrale)

1) Montrer que : $\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k\ln(k)}$.

2) Que peut-on dire de la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$?