Fiche 12 d'exercices : Calcul différentiel

1 Exercices d'assimilation du cours

Exercice 1 (Dérivabilité en un point)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x|$.
Montrer que f est dérivable à gauche en 0, dérivable à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 (Dérivabilité en un point)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1+x}{x}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Etudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 3 (Calcul de dérivée)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1)$.
Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

Exercice 4 (Calcul de dérivée)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \geq 0, f(x) = \sqrt{x}\ln(1 + \sqrt{x})$.
Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer f'.

Exercice 5 (Fonction convexe)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \geq 0, f(x) = xe^x$.
Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6 (Application de la convexité)

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

2 Exercices d'entraînement

Exercice 7 (Dérivabilité en un point)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x > 0, f(x) = x^x$ et $f(0) = 0$.
f est-elle continue en 0 ?
f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 8 (Calcul de dérivée)

Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x > 0, f(x) = x^x$.
Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer f'.

Exercice 9 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x > 0, f(x) = x^2 \ln(x)$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 10 (Calcul de dérivée $n^{\text{ième}}$)

Soit $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x < 1, f(x) = -\ln(1-x)$.
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

Exercice 11 (Fonction convexe)

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est convexe sur $\mathbb{R}$ et g est à la fois convexe et croissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 12 (Application de la concavité)

Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 13 (Point d'inflexion)

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x^2 - x\ln(x)$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, noté I, et préciser ses coordonnées.

3 Exercices d'approfondissement

Exercice 14 (Recherche de fonction)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -xf''(x) + 2x$ et $f(0) = 1$.
Déterminer f.

Exercice 15 (Etude de fonction)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \geq 0, f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$.
1) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
2) Dresser le tableau de variations de f.
3) Tracer la courbe représentative de f.