Fiche 10 d'exercices : Applications linéaires

1 Exercices d'assimilation du cours

Exercice 1 (Application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (2x - y + z, x + 2z)$.
Montrer que f est linéaire.

Exercice 2 (Etude d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (x - y, x + 2y, -y)$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. Que peut-on en déduire ?
3) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3 (Image d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (x - y, x + 2y, -y)$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4 (Etude d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x - z, x + y + z)$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire ?
3) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 (Etude d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par : $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, f((x, y, z, t)) = (2x + z, -y + t, x + 2z, y - t)$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire ?
3) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire ?

2 Exercices d'entraînement

Exercice 6 (Applications linéaires)

Montrer dans chacun des cas suivants que l'application f est linéaire.
1) $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, x - z)$.
2) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, y - z, x - z)$.
3) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y - z)$.
4) $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y, x + y + z)$.
5) $f : (x, y, z) \mapsto (x, x + y + z, x + 2y + 4z)$.

Exercice 7 (Noyau d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x - y, y - z, x - z)$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire ?

Exercice 8 (Noyau d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x + y + z, y - z, x - z)$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9 (Image d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicaion linéaire définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x + y, x - y - z)$.
Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 10 (Image d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x - y, x + y, x + y + z)$.
Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11 (Image d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x, x + y + z, x + 2y + 4z)$.
Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 12 (Application linéaire bijective)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x - y, x + y, x + y + z)$.
Montrer que f est bijective.

Exercice 13 (Rang d'une application linéaire)

Déterminer le rang des applications linéaires suivantes.
Indication : On procédera de deux façons : d'une part en ayant recours à la formule du rang et, d'autre part, en exprimant l'image de f en fonction des images des vecteurs de la base canonique.
1) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y - z)$.
2) $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y, x + y + z)$.
3) $f : (x, y, z) \mapsto (x, x + y + z, x + 2y + 4z)$.

3 Exercices d'approfondissement

Exercice 14 (Etude d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x - y, y - z, x - z)$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire ?
3) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire ?

Exercice 15 (Etude d'une application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (2x - y, x + y + z, z)$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. Que peut-on en déduire ?
3) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire ?
4) Montrer que f est bijective.

Exercice 16 (Applications linéaires de E dans E dont la composée est nulle)

Soient E un espace vectoriel puis f et g deux applications linéaires de E dans E.
1) Montrer que : $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2) En déduire que : $f^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 17 (Noyau et image du carré d'une application linéaire de E dans E)

Soient E un espace vectoriel puis f une application linéaire de E dans E.
1) Montrer que : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
2) Montrer que : $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 18 (Noyau et image du carré d'une application linéaire de E dans E - suite)

Soient E un espace vectoriel puis f une application linéaire de E dans E.
1) Montrer que : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
2) Montrer que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longleftrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 19 (Introduction à la réduction)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f((x,y,z)) = (x-y+z, -x+y+z, -x-y+3z)$.
On définit pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) = \left\{x \in \mathbb{R}^3, f(x) = \lambda x\right\}$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3) a) Montrer que : $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id} = 0$.
3) b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in E_\lambda(f)$. Montrer que : $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x = 0$. En déduire que si $\lambda \notin \{1,2\}$, alors $E_\lambda(f) = \{0\}$.
4) a) Déterminer $E_1(f)$ et en donner une base.
4) b) Déterminer $E_2(f)$ et en donner une base.
5) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis expliciter $\mathrm{Im}(f)$.