ESCP 2024 (3) :

Exercice 3

On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, alors $X+Y$ est une variable aléatoire réelle. Dans cet exercice, on étudie deux versions d'un jeu, dont le but est d'obtenir un maximum de points.
Soit n un entier naturel pair noté $n = 2N$ avec N un entier supérieur ou égal à 2.
On dispose d'une urne contenant n billes, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n.

Partie I) Première version

Dans ce premier jeu, le joueur tire au hasard une bille dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au résultat du numéro obtenu. On remet la bille dans l'urne et on effectue un deuxième tirage. On définit alors une variable aléatoire Y qui vaut 1 si ce numéro est impair et 0 si ce numéro est pair. À la fin du jeu, le nombre de points du joueur vaut $X+Y$.

Par exemple si le joueur tire la bille numéro 4, remet cette bille dans l'urne, puis tire la bille numéro 3, alors $X = 4$, $Y = 1$ et le nombre de points obtenus par le joueur vaut $X + Y = 5$.

1. (a) Combien y a-t-il de numéros pairs dans l'urne lorsque $n = 2N$?
   (b) Reconnaitre, en justifiant, les lois de X et Y. Donner leurs espérance et variance.
2. **Python**
   Compléter le programme suivant afin qu'il simule le nombre de points obtenus par le joueur à l'issue d'une partie du jeu.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def jeu_1(N):
        n=2*N
        X= rd.randint(1,n+1)
        Y= rd.randint(0,2)
        return ......
```

3. Justifier que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
4. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X + Y$? Justifier votre réponse.
5. (a) Justifier les égalités suivantes : $P(X+Y=1) = \dfrac{1}{2n}$ et $P(X+Y=n+1) = \dfrac{1}{2n}$.
   (b) Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Déterminer $P(X+Y=k)$ en utilisant la formule des probabilités totales.
   (c) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} P(X+Y=k) = 1$.
6. (a) Que vaut $\mathbb{E}(X+Y)$? Interpréter le résultat obtenu.
   (b) **Python**
   On définit le programme suivant :

```
def simulation(N):
        s=0
        for k in range(1000):
                s=s+ jeu_1(N)
        return s/1000
```

On exécute `simulation(4)` et Python renvoie 4,939. Expliquer ce résultat.

Partie II) Seconde version

Dans ce second jeu, on ne remet pas la bille tirée au premier tirage dans l'urne. Le jeu devient donc :
Le joueur tire au hasard une bille dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au résultat du numéro obtenu. On ne remet pas la bille dans l'urne et on effectue un deuxième tirage. La variable aléatoire Y vaut 1 si ce numéro est impair et 0 si ce numéro est pair. À la fin du jeu, le nombre de points du joueur vaut toujours $X + Y$.

1. (a) Montrer que : $P_{(X \text{ est paire})}(Y = 1) = \dfrac{N}{2N-1}$ et que $P_{(X \text{ est impaire})}(Y = 1) = \dfrac{N-1}{2N-1}$.

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $((X \text{ est paire}), (X \text{ est impaire}))$, calculer $P(Y = 1)$.

   (c) En déduire la loi de Y.

2. (a) Donner la valeur de $P((X = 1) \cap (Y = 1))$ en justifiant votre réponse.

   (b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3. On rappelle que le but du jeu est d'obtenir le plus de points possibles. Est-ce qu'une version du jeu est favorable en moyenne au joueur ?