

ESCP 2023 (4) :

Exercice 4

On pose $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}$$

1) a) Montrer que l'on définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs.

On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n , le réel u_n est bien défini et strictement positif.

b) Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

```
def suite(n):  
    u=1/2  
    for k in range(2,n+1):  
        u=.....  
    return u
```

2) Donner la valeur de u_2 , puis vérifier que $u_3 = \frac{1}{12}$.

3) a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour établir l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

4) Pour tout entier naturel k non nul, on pose : $v_k = \frac{1}{u_k}$.

a) Établir l'égalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, v_{k+1} - v_k = 2(k+1)$$

b) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique ? Justifier.

c) Par sommation de l'égalité obtenue à la question 4a), établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n(n+1)$$

d) En déduire explicitement u_n en fonction de n puis retrouver la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5) a) Déterminer les constantes a et b pour lesquelles, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}$$

b) Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 1, calculer la somme $\sum_{n=1}^N u_n$.

c) En déduire que la série de terme général u_n converge et donner sa somme.

6) a) Expliquer pourquoi on peut maintenant considérer une variable aléatoire X dont la loi est donnée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = u_n$$

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n+1}$$

c) En déduire l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \geq \ln(N+2) - \ln(2)$$

d) Montrer alors que X ne possède pas d'espérance.