ESCP 2023 (1) :

Exercice 1

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1) Exprimer A^2 en fonction de A et de I, puis déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

2) a) Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?

b) Utiliser le polynôme annulateur trouvé pour montrer que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et I.

3) On considère les vecteurs $U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

a) Calculer les produits AU, AV et AW et en déduire que les valeurs propres possibles de A trouvées à la question 2a) sont effectivement valeurs propres de A.

b) On pose $Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Montrer que $AQ=QD$.

c) On donne $R=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$.

Calculer QR puis en déduire que Q est inversible et exprimer Q^{-1} en fonction de R.

d) En déduire que A est diagonalisable.

4) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n=QD^nQ^{-1}$.

b) Vérifier que la première ligne de la matrice A^n est $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n\end{pmatrix}$.

5) Un jeton se déplace sur les trois sommets numérotés 1, 2, 3 d'un triangle selon la règle suivante : s'il est sur un sommet, il se dép[illegible]e de façon équiprobable sur l'un des deux autres.
Au départ, le jeton se trouve sur le sommet 1. On pose $X_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le jeton après le n-ième déplacement.

a) Donner la loi de X_1 puis vérifier que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2=1)=\frac{1}{2} \qquad P(X_2=2)=\frac{1}{4} \qquad P(X_2=3)=\frac{1}{4}$$

b) On considère la matrice à une ligne et trois colonnes $L_n=\begin{pmatrix}P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3)\end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, utiliser la formule des probabilités totales pour établir la relation :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}P(X_n=2)+\frac{1}{2}P(X_n=3)$$

c) Donner sans démonstration les égalités analogues concernant $P(X_{n+1}=2)$ et $P(X_{n+1}=3)$, puis en déduire la matrice carrée B, proportionnelle à A, telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ L_{n+1}=L_nB$$

d) Vérifier que la relation précédente reste valable pour $n=0$ et $n=1$.

e) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $L_n=L_0B^n$.

f) En déduire, grâce à la question 4b), la loi de X_n pour tout entier naturel n.