

ESCP 2022 (2) :

Exercice 2 (probabilités continues et estimation)

Soit a un réel tel que $0 < a \leq 1$. On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a^2} & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ \frac{2a-t}{a^2} & \text{si } a < t \leq 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2/ Dans le cas particulier où $a = 1$, tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé, en prenant une unité suffisamment grande pour la clarté du dessin.

On revient au cas général où $0 < a \leq 1$.

- 3/ a/ Déterminer les valeurs respectives des intégrales $\int_0^a f(t) dt$ et $\int_a^{2a} f(t) dt$.
b/ En déduire que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X .
- 4/ a/ Montrer que X possède une espérance $E(X)$ et que $E(X) = a$.
b/ Montrer que X^2 possède une espérance $E(X^2)$ et que :

$$E(X^2) = \frac{7a^2}{6}$$

- c/ En déduire que X possède une variance $V(X)$ et la déterminer.
- 5/ Dans cette question, on suppose que le paramètre a est inconnu et on souhaite en faire une estimation. À cet effet, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes, suivant toutes la même loi que X , et on pose :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

- a/ Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\bar{X}_n$.
- b/ En déduire que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de a .
Quel est son risque quadratique ?
- 6/ On note ε un réel strictement positif.

- a/ Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\bar{X}_n$, puis établir l'inégalité :

$$P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$

- b/ En déduire l'inégalité :

$$P(\bar{X}_n - \varepsilon \leq a \leq \bar{X}_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$

- c/ On a réalisé 1000 simulations $X_1, X_2, \dots, X_{1000}$ de la variable aléatoire X . Donner, en fonction de $\bar{X}_{1000}$ et en prenant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{600}}$, l'intervalle de confiance pour a qui correspond à cette réalisation. Quel est le niveau de confiance de cet intervalle ?