

ESCP 2022 (1) :

Exercice 1 (matrices)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1/ a/ Calculer A^2 puis déterminer le réel α tel que $A^3 = \alpha A$.

b/ En déduire, par l'absurde, que A n'est pas inversible.

Dans la suite, on se propose de déterminer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la matrice A^n de deux façons différentes.

2/ Première méthode (α désigne le réel déterminé à la question 1/a/)

a/ Montrer que :

$$A^5 = \alpha^2 A$$

b/ Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel p non nul, on a :

$$A^{2p-1} = \alpha^{p-1} A$$

c/ En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, on a :

$$A^{2p} = \alpha^{p-1} A^2$$

3/ Deuxième méthode

a/ Déduire de la question 1/a/ les trois valeurs propres possibles de la matrice A .

b/ Montrer que le système $AX = -4X$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est équivalent à :

$$\begin{cases} y = -3z \\ x = z \end{cases}$$

En déduire une valeur propre de A et donner un vecteur propre associé.

c/ Résoudre le système $AX = 0$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et en déduire une deuxième

valeur propre de A . Vérifier qu'un vecteur propre associé est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d/ Calculer le produit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en déduire la troisième valeur propre de A .

e/ On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer les deux produits AP et PD .

f/ On considère la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer PQ puis en déduire que P est inversible et donner P^{-1} .

g/ Justifier que la matrice A est diagonalisable, puis montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Écrire explicitement les neuf éléments de la matrice A^n (toujours avec $n \geq 1$).