

ESCP 2021 (3) :

Exercice 3 (analyse)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1/ a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue à droite en 0.
- b/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que f est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé à droite de f en 0, noté $f'_d(0)$.
- 2/ a/ Déterminer, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, l'expression de $f'(x)$ en fonction de x , où f' désigne la fonction dérivée de f .
- b/ Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis donner les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
- c/ Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de f .
- d/ Vérifier que, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a $f''(x) = \frac{1}{x^3}e^{-1/x}$. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}_+$?
- 3/ a/ Calculer $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u}$.
- b/ En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$.
- c/ On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Donner l'équation cartésienne réduite de la droite asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de (C) .

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

- 4/ a/ Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.
- b/ Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- c/ En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
- d/ On importe la bibliothèque numpy par l'instruction `import numpy as np`. Compléter les commandes suivantes pour qu'elles affichent le rang n à partir duquel $u_n \leq 10^{-3}$:

```
1 n = 0
2 u = 1
3 while u > 0.001:
4     u = .....
5     n = .....
6 print(n)
```

- 5/ a/ Montrer que, pour tout entier naturel n , on a la relation :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln u_{n+1}$$

- b/ En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est divergente.