

ESCP 2020 (3) :

Exercice 3 (fonction définie par une intégrale)

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(x)$.

- 1/ a/ Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Minorer $\frac{1}{t}$ pour tout t de $[1, x]$, puis montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$.
- b/ En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c/ Justifier l'existence, sur $[1, +\infty[$, de la dérivée f' de la fonction f et montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{e^x}{x}$.
- d/ Montrer que la fonction f est convexe sur $[1, +\infty[$.
- e/ Quelle est l'équation cartésienne réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 ?

Dans la suite, on se propose de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) e^{-x} = 1$.

- 2/ a/ Dresser le tableau de variation de la fonction g définie par :

$$\forall t \in [1, +\infty[\quad g(t) = \frac{e^t}{t^3}$$

- b/ En déduire l'encadrement :

$$0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq 2e$$

- c/ Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 3, on a l'encadrement :

$$0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x$$

- 3/ a/ Grâce à une intégration par parties, montrer que, pour tout réel x de $[1, +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$$

- b/ À l'aide d'une deuxième intégration par parties, établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) dt$$

- 4/ a/ Utiliser les questions précédentes pour déterminer un encadrement de $f(x)$ qui soit valable pour tout réel x de $[3, +\infty[$.

- b/ En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) e^{-x} = 1$$