Annale ENS 2016 :

Problème 1

Soient les deux applications linéaires suivantes :

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (2z_1 - z_3, 3z_1 + z_2 + 2z_3)$$
$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1 + z_2, -z_2, 2z_1 - z_2)$$

1. Déterminez H la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminez K la matrice de v dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminez le noyau de u. u est-elle injective ?
4. Déterminez l'image de u. u est-elle surjective ?
5. Calculez HK.
6. Montrez que $(HK)^2 = \lambda \times I_2$ où I_2 est la matrice identité de dimension 2 et λ est un scalaire (appartenant à $\mathbb{R}$) à déterminer.
7. En déduire sans (long) calcul que HK est inversible.
8. Déterminez $(u \circ v)^2$.

Annale ENS 2017 :

Problème 1

Soient $v_1 = 3e_1 - 2e_2$ et $v_2 = -e_1 + e_2$ où e_1 et e_2 sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. (a) Les vecteurs (v_1, v_2) forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?
   (b) Exprimez e_1 et e_2 en fonction de v_1 et v_2.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, l'application définie par $g(v_1) = v_1$ et $g(v_2) = -v_2$
   (a) Quelle est la matrice M de g dans la base (v_1, v_2) ?
   (b) Calculez M^2. Que peut-on dire de $g \circ g$?
   (c) Déterminez la matrice A de g dans la base (e_1, e_2).
   (d) Calculez A^2.
3. On note $<;>$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et $||.||$ la norme associée. Pour $v \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(v) = \dfrac{< v; v_1 >}{||v_1||^2} v_1$.
   (a) Exprimez $f(v)$ en fonction des coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de v.
   (b) Donnez sa matrice F dans la base canonique.
   (c) Calculez F^2.