

Annale ENS 2022 :

Problème 3.

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et $I \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice identité. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A , aussi appelé le commutant de A , c'est-à-dire

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Donner deux éléments évidents de $C(A)$.
- Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.
- Montrer que si M et M' sont des éléments de $C(B)$ alors MM' est aussi un élément de $C(B)$.
- Montrer que si $M \in C(B)$ est inversible, alors son inverse M^{-1} est aussi un élément de $C(B)$.

2. Soit D une matrice diagonale appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

a. Soit $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles conditions doit-elle vérifier pour appartenir à $C(D)$?

b. On suppose que les trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont distincts deux à deux. Montrer que M est nécessairement une matrice diagonale.

c. On suppose à présent que $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_3$. Déterminer $C(D)$. Donner une base et la dimension de $C(D)$.

d. Enfin, déterminer $C(D)$ dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

3. On s'intéresse à présent au commutant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et une matrice P que l'on déterminera.

b. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence

$$M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(D).$$

c. En déduire la dimension de $C(A)$.

d. Montrer que la famille $\{I, A, A^2\}$ est une base de $C(A)$.