Annale ENS 2021 :

Problème 1. Algèbre

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y + z, 2z)$, et $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application identité.

1. **a.** Montrer que f est une application linéaire.

b. Donner la matrice M associée à f dans (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et donner en une base. On notera u_1 un vecteur de cette base. L'application f est-elle injective ?

2. **a.** Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

b. Montrer que les vecteurs $u_2 = f(e_2) = (-1, 1, 0)$ et $u_3 = f(e_3) = (1, 1, 2)$ forment une base de $\mathrm{Im}(f)$.

c. L'application f est-elle surjective ?

3. **a.** Montrer que (u_1, u_2, u_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Donner la matrice D de f dans cette base.

c. Donner une matrice P telle que $D = P^{-1}MP$.

4. **a.** Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, expliciter la matrice associée à l'application f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Annale ENS 2023 :

Problème 1. Algèbre

On considère l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbf{F}$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (A, B, C)$ et pour a, b, c réels, on pose

$$M_{abc} = aA + bB + cC.$$

1. Prouver que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{F}$. Donner la dimension de $\mathbf{F}$.

2. Montrer que la matrice C^2 appartient à $\mathbf{F}$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère les matrices suivantes

$$N_1 = A - B - C, \quad N_2 = 2A - 2B - C, \quad N_3 = A.$$

3. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (N_1, N_2, N_3)$ est une base de $\mathbf{F}$.

4. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Déterminer son inverse.

5. Soit a, b, c trois nombres réels. On note x, y, z les coordonnées de M_{abc} dans $\mathcal{B}'$. On a donc $M_{abc} = xN_1 + yN_2 + zN_3$. Exprimer x, y, z en fonction de a, b, c.