# Fiche 9 d'exercices : Variables aléatoires à densité

## 1 Exercices d'assimilation du cours

**Exercice 1** (Densité de probabilité)

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

Montrer que la fonction $f$ est une densité de probabilité.

**Exercice 2** (Fonction de répartition)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{2}{t^3}$ si $t \geq 1$ et $f(t) = 0$ sinon.

1) Montrer que la fonction $f$ est une densité de probabilité.
2) Soit $X$ une variable aléatoire admettant $f$ pour densité. Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.
3) Soit $Y = 2X + 3$. Déterminer la fonction de répartition de $Y$ à l'aide de celle de $X$.

**Exercice 3** (Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité)

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f(t) = \dfrac{3}{t^4}$ si $t \geq 1$ et $f(t) = 0$ si $t < 1$.
1) $X$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
2) $X$ admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

**Exercice 4** (Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite)

1) Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
a) Calculer $P(X \leq 0,65)$.
b) Calculer $P(X > 0,23)$.
c) Calculer $P(-0,5 < X \leq 1,23)$.

2) Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(1,4)$.
a) Calculer $P(X < 3)$.
b) Calculer $P(X \geq -1)$.
c) Calculer $P(0 \leq X < 5)$.

## 2 Exercices d'entraînement

**Exercice 5** (Densité de probabilité et fonction de répartition)

1) Montrer que chacune des fonctions $f$ définies ci-dessous est une densité de probabilité.

a) $f(x) = \dfrac{4}{x^5}$ si $x \geq 1$ et $f(x) = 0$ si $x < 1$.

b) $f(x) = 3x^2$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

c) $f(x) = \dfrac{1}{3}$ si $-1 \leq x < 0$, $f(x) = \dfrac{2}{3}$ si $0 \leq x < 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

2) Pour chacune des fonctions $f$ précédentes, déterminer la fonction de répartition $F_X$ d'une variable aléatoire $X$ de densité $f$.

**Exercice 6** (Calculs de probabilités)

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 1$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ si $x > 1$.

1) Justifier que $f$ est une densité.
2) Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. Déterminer les probabilités suivantes.

a) $P(X \leq 0)$,

b) $P(X \leq 1)$,

c) $P(X > 1)$,

d) $P(X \leq 2)$,

e) $P(X \leq 3)$,

f) $P(X \in ]2, 3[)$.

**Exercice 7** (Variable aléatoire de la forme $Y = aX + b$)

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[1, 2]$. On note $Y$ la variable aléatoire définie par $Y = 3X$. On note $F_X$ la fonction de répartition de $X$ et $F_Y$ la fonction de répartition de $Y$.
1) Déterminer pour tout réel $x$ l'expression de $F_X(x)$.
2) Justifier que pour tout réel $y$, $F_Y(y) = F_X(y/3)$.
3) En déduire pour tout réel $y$ l'expression de $F_Y(y)$.
4) En déduire la loi de $Y$.

**Exercice 8** (Variable aléatoire de la forme $Y = aX + b$)

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. On note $Y$ la variable aléatoire définie par $Y = X/2$. On note $F_X$ la fonction de répartition de $X$ et $F_Y$ la fonction de répartition de $Y$.
1) Déterminer pour tout réel $x$ l'expression de $F_X(x)$.
2) Justifier que pour tout réel $y$, $F_Y(y) = F_X(2y)$.
3) En déduire pour tout réel $y$ l'expression de $F_Y(y)$.
4) En déduire la loi de $Y$.
5) Déterminer $P(Y \leq 3)$ et $P_{[Y \leq 3]}(Y > 1)$.

**Exercice 9** (Variable aléatoire de la forme $Y = aX + b$)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x(1-x)$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.
1) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.
2) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ d'une variable aléatoire $X$ admettant $f$ pour densité.
3) Déterminer l'espérance de $X$.
4) On pose $Y = 3X + 2$. Déterminer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.
5) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(y) = (-2y^2 + 14y - 20)/9$ si $2 \leq y \leq 5$ et $g(y) = 0$ sinon. Montrer que $g$ est une densité de la variable aléatoire $Y$.
6) Déterminer l'espérance de $Y$.

**Exercice 10** (Variable aléatoire suivant la loi exponentielle)

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ définies par :
• $X_1$ est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne,
• $X_2$ est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la première panne et la panne suivante,
• $X_3$ est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la deuxième panne et la panne suivante.
Après la troisième panne, l'utilisation de la machine est suspendue. On suppose que les variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes les trois une loi exponentielle de paramètre $1/2$.
1) Quelle est la durée moyenne de fonctionnement de la machine entre la mise en route de la machine et la première panne ?
Entre la remise en route de la machine après la première panne et la deuxième panne ?
Entre la remise en route de la machine après la deuxième panne et la troisième panne ?
2) Déterminer la probabilité de l'événement $E$ : « chacune des trois périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures ».

**Exercice 11** (Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite)

1) Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
a) Calculer $P(X < 0)$.
b) Calculer $P(X > 3)$.
c) Calculer $P(-1,96 < X < 1,96)$.

2) Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(-3, 1)$.
a) Calculer $P(X < -1)$.
b) Calculer $P(X > -5)$.
c) Calculer $P(-5 < X < -1)$.

3) Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(8, 4)$.
a) Calculer $P(X < 7,5)$.
b) Calculer $P(X > 8,5)$.
c) Calculer $P(6,5 < X < 10)$.

**Exercice 12** (Variable aléatoire suivant la loi normale)

La variable aléatoire qui correspond aux commandes quotidiennes en antalgiques (aspirine, ibuprofène, etc.) suit une loi normale d'espérance 250 et d'écart-type 20. Le stock disponible en début de matinée est de 300 antalgiques. Quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock ?

## 3 Exercices d'approfondissement

**Exercice 13** (Etude d'une variable aléatoire à densité)

1) Donner la définition d'une densité de probabilité.
Soit $\alpha$ un réel donné vérifiant $\alpha > 3$.
2) On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{\alpha - 1}{x^\alpha}$ si $x \geq 1$ et $f(x) = 0$ si $x < 1$.
Montrer que $f$ peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$.
3) a) Déterminer la fonction de répartition $F$ de la variable aléatoire $X$.
3) b) Etudier les variations de la fonction $F$.
3) c) Tracer la courbe représentative de $F$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (pour le dessin, on prendra $\alpha = 4$).
3) d) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire $X$.

**Exercice 14** (Variable aléatoire suivant la loi uniforme)

Soit $f$ la fonction réelle définie par $f(t) = \dfrac{1}{2}t$ si $t \in ]0, 2]$ et $f(t) = 0$ sinon.
1) a) Montrer que $f$ est continue en 0 puis que $f$ est une densité de probabilité.
1) b) On note désormais $X$ une variable aléatoire de densité $f$ et on note $F$ sa fonction de répartition. Rappeler l'intégrale permettant de calculer $F(x)$ en fonction de la densité $f$.
Calculer $F(x)$ en séparant les cas $x \leq 0$, $0 < x \leq 2$ et $x > 2$.
1) c) Calculer la probabilité $P(X \leq 1)$ et la probabilité $P(1/2 < X \leq 1)$.
1) d) Justifier que $X(\Omega) = ]0, 2]$.
2) Déterminer l'espérance de $X$.
Soient $U$ la variable aléatoire définie par $U = X^2$ et $G$ sa fonction de répartition.
3) Déterminer $U(\Omega)$ puis justifier que si $x \leq 0$, $G(x) = 0$ et si $x > 4$, $G(x) = 1$.
4) a) Justifier l'égalité des événements $[U \leq 2]$ et $[-\sqrt{2} \leq X \leq \sqrt{2}]$ puis en déduire $G(2)$.
4) b) Plus généralement, montrer que si $0 < x \leq 4$, $G(x) = \dfrac{1}{4}x$.
4) c) Dresser un bilan pour la fonction $G$ puis reconnaître la loi de $U$.
4) d) En déduire l'espérance $E(U)$ puis la valeur de la variance de $X$.

**Exercice 15** (Variable aléatoire suivant la loi exponentielle)

Soient $a$ un réel strictement positif et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que $f(t) = 2e^{-2(t-a)}$ si $t \geq a$ et $f(t) = 0$ sinon.
1) a) Soit $B$ un réel supérieur ou égal à $a$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^B 2e^{-2(t-a)}\mathrm{d}t$.
1) b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)}\mathrm{d}t$.
2) Montrer que $f$ peut être considérée comme une densité de probabilité.
Dans la suite, on note $X$ une variable aléatoire admettant $f$ comme densité.
3) Montrer que la fonction de répartition $F_X$ de $X$ est donnée par $F_X(x) = 1 - e^{-2(x-a)}$ si $x \geq a$ et $F_X(x) = 0$ sinon.
4) On note $Y$ la variable aléatoire définie par $Y = X - a$.
a) Déterminer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.
b) En déduire que $Y$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
c) Donner la valeur de l'espérance de $Y$.
d) En déduire que $X$ admet une espérance et donner sa valeur.