

ECRICOME 2023 (2) :

Exercice 2

Partie 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
On admet que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la limite de f en $-\infty$.
 $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote ? Si oui, donner l'équation de cette asymptote.
4. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
(b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.
(c) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
(d) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x , et en déduire la position relative de (D) par rapport à $\mathcal{C}_f$.
5. Déterminer l'équation de la tangente (T_0) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
6. (a) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes et la valeur en 0.
(b) Tracer sur un même repère l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites (D) et (T_0) .
On admet qu'une valeur approchée de $\ln(2)$ est 0,69.

Partie 2

Pour tout entier naturel n , on pose pour tout réel x de $[0, 1]$, $g_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$ et $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$.

7. (a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$.
(b) En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
(c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente.
8. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1 + e^{-nx}} dx.$$

- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 xe^{-nx} dx$.
- (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\int_0^1 xe^{-nx} dx = \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1 - e^{-n}}{n^2}$.
- (d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
9. (a) Écrire une fonction en langage Python, nommée `gn`, prenant en entrée un entier naturel non nul n et un réel x et renvoyant $g_n(x)$.

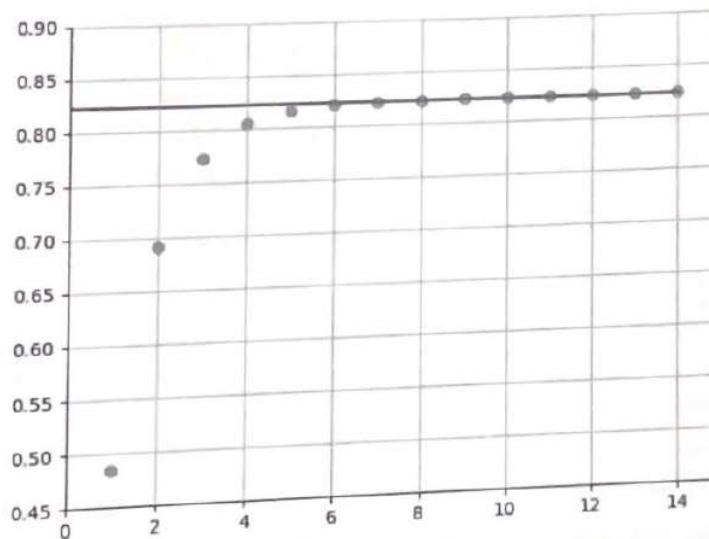
- (b) On dispose d'une fonction en langage Python nommée I prenant en entrée un entier naturel non nul n et renvoyant une valeur approchée de I_n à 10^{-7} près.
On exécute le code suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L_x = np.zeros(14)
L_y = np.zeros(14)
for n in range(14):
    L_x[n] = n+1
    L_y[n] = (n+1)*I(n+1)

plt.plot(L_x,L_y, 'r')
plt.plot([1,14],[np.pi**2/12,np.pi**2/12])
plt.show()
```

On obtient la figure ci-dessous :



Que peut-on conjecturer sur la suite $(nI_n)_{n \geq 1}$?