# ECRICOME 2022 (2) :

## Exercice 2 (analyse)

On pose, pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-1, +\infty[$ :

$$f(x) = x\ln(1+x)$$

On admet que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et que sa dérivée $f'$ est également dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de $f$ dans un repère du plan.

**1/** **a/** Déterminer la limite de $f$ en $-1$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$ ?

**b/** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**c/** Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

**2/** **a/** Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-1, +\infty[$.

**b/** Montrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-1, +\infty[$ :

$$f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$$

**c/** En déduire les variations de la fonction $f'$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

**3/** **a/** Calculer $f'(0)$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x > -1$.

**b/** Dresser le tableau de variations de $f$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

**4/** Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan, en soignant le tracé au point d'abscisse 0.

**5/** On pose :

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

**a/** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

**b/** Vérifier que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

**c/** En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

**d/** Calculer l'intégrale $I$.

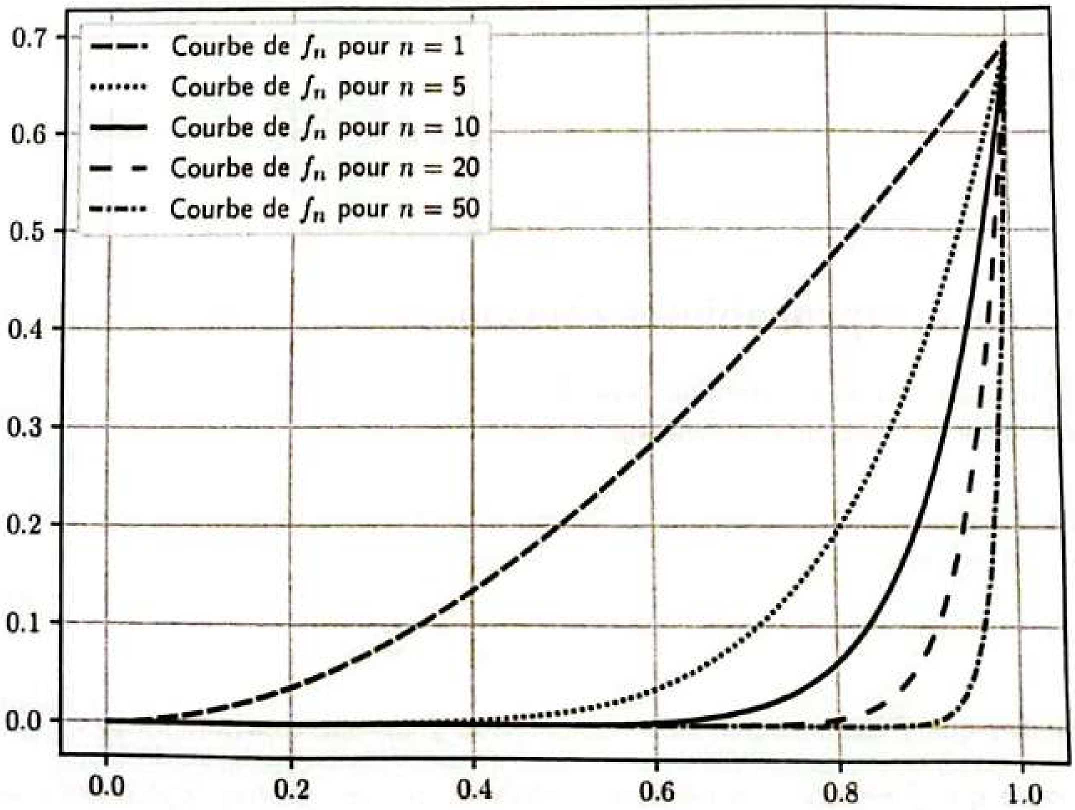
**6/** On considère à présent la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1, +\infty[$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall x \in ]-1, +\infty[ \qquad f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

On pose alors, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Le graphique ci-dessous contient les représentations graphiques des fonctions $f_1$, $f_5$, $f_{10}$, $f_{20}$ et $f_{50}$ sur l'intervalle $[0\,,1]$.




On importe la bibliothèque numpy par l'instruction

```
import numpy as np
```

On importe la bibliothèque matplotlib.pyplot par l'instruction

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Recopier et compléter le script PYTHON ci-dessous pour qu'il trace les courbes des fonctions $f_1$, $f_5$, $f_{10}$, $f_{20}$ et $f_{50}$ sur l'intervalle $[0\,,1]$.

```
def f(x):
    y = .....
    return y

for n in .....
    X = np.linspace(0, 1, 101)
    Y = .....
    plt.plot(.....)

plt.grid()
plt.show()
```

**7/** **a/** Interpréter géométriquement l'intégrale $I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**b/** En utilisant le graphique ci-dessus, conjecturer la limite de la suite $(I_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**8/** **a/** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(2)$$

**b/** En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}$$

**c/** Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.