ECRICOME 2021 (3) :

Exercice 3 (probabilités discrètes)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, égale à la durée de fonctionnement d'un composant électronique jusqu'à sa première panne éventuelle.
Pour tout entier naturel n, on note : $u_n = P([X > n])$.
On suppose dans cette partie que, pour tout entier naturel n : $u_n \neq 0$.
Le composant est mis en service à l'instant 0. On a ainsi $u_0 = 1$.

1/ **a/** Soit n un entier naturel non nul. Justifier l'égalité d'événements :

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n]$$

b/ Justifier que, pour tout entier naturel non nul :

$$u_{n-1} - u_n = P([X = n])$$

2/ On suppose que la probabilité que le composant tombe en panne à l'instant n sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$ vaut $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire que :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad P_{[X>n-1]}([X = n]) = \frac{2}{5}$$

a/ Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P_{[X>n-1]}([X > n]) = 1 - P_{[X>n-1]}([X = n])$$

b/ Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $u_n = \dfrac{3}{5}u_{n-1}$.

c/ En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de u_n en fonction de n.

3/ **a/** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P([X = n]) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

b/ En déduire que X suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

c/ Donner l'espérance et la variance de X.

Partie B

Un appareil est constitué de deux composants électroniques dont les durées de vie sont supposées indépendantes. Cet appareil ne fonctionne que si au moins un des deux composants est en état de marche. Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales à la durée de vie de chacun de ces composants et Z la variable aléatoire égale à la durée de vie de l'appareil. La durée de vie de l'appareil est donc égale à la plus grande des durées de vie des deux composants.
On suppose que X_1 et X_2 suivent la même loi géométrique de paramètre $\frac{2}{5}$.

4/ a/ On importe la bibliothèque `numpy.random` par l'instruction

```
import numpy.random as rd
```

On rappelle que l'instruction `rd.random()` renvoie un réel choisi au hasard et uniformément dans l'intervalle $[0\,,1]$.

Recopier et compléter le script ci-dessous pour qu'il crée une fonction `geom` qui simule une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $\frac{2}{5}$.

```
def geom():
    X = .....
    while ..... :
        X = .....
    return X
```

b/ Recopier et compléter alors le script ci-dessous pour qu'il crée une fonction `simulZ()` qui simule la variable aléatoire Z.

```
def simulZ():
    X1 = geom()
    X2 = geom()
    if X1 > X2:
        Z = .....
    else:
        Z = .....
    return Z
```

5/ Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$P([X_1 \leqslant n]) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

6/ a/ Justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité :

$$[Z \leqslant n] = [X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n]$$

b/ En déduire la valeur de $P([Z \leqslant n])$ pour tout entier naturel n non nul.

c/ Pour tout entier naturel n non nul, en remarquant que

$$P([Z = n]) = P([Z \leqslant n]) - P([Z \leqslant n-1])$$

montrer que :

$$P([Z = n]) = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}$$

7/ Justifier la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{9}{25}\right)^n$ puis vérifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P([Z=n]) = 1$$

8/ **a/** Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $\frac{16}{25}$.
Justifier que, pour tout entier naturel n non nul :

$$nP([Z=n]) = 2nP([X_1=n]) - nP([Y=n])$$

b/ En déduire que Z admet une espérance, et que :

$$E(Z) = 2E(X_1) - E(Y)$$

En déduire la valeur de $E(Z)$.