Devoir sur table : 05/03/2025

ECRICOME 2023

Exercice 2

Partie 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
   On admet que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.
   En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la limite de f en $-\infty$.
   $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote ? Si oui, donner l'équation de cette asymptote.
4. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.
   (c) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
   (d) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x, et en déduire la position relative de (D) par rapport à $\mathscr{C}_f$.
5. Déterminer l'équation de la tangente (T_0) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
6. (a) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes et la valeur en 0.
   (b) Tracer sur un même repère l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites (D) et (T_0).
   On admet qu'une valeur approchée de $\ln(2)$ *est* $0,69$.

Partie 2

Pour tout entier naturel n, on pose pour tout réel x de $[0, 1]$, $g_n(x) = \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x$.

7. (a) Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
8. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,
$$I_n = \ln\left(1 + e^{-n}\right) + n\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1 + e^{-nx}}\mathrm{d}x.$$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(1 + e^{-n}\right) + n\displaystyle\int_0^1 xe^{-nx}\mathrm{d}x$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\int_0^1 xe^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1 - e^{-n}}{n^2}$.
   (d) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
9. (a) Écrire une fonction en langage Python, nommée `gn`, prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et un réel `x` et renvoyant $g_n(x)$.

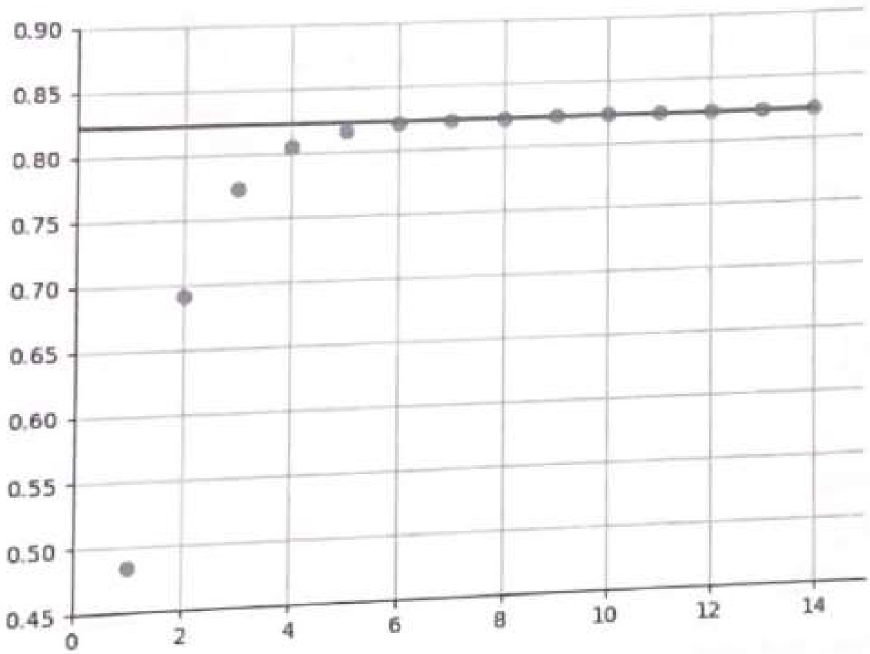
(b) On dispose d'une fonction en langage Python nommée `I` prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et renvoyant une valeur approchée de I_n à 10^{-7} près.
On exécute le code suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L_x = np.zeros(14)
L_y = np.zeros(14)
for n in range(14):
    L_x[n] = n+1
    L_y[n] = (n+1)*I(n+1)

plt.plot(L_x,L_y,'.r')
plt.plot([1,14],[np.pi**2/12,np.pi**2/12])
plt.show()
```

On obtient la figure ci-dessous :



Que peut-on conjecturer sur la suite $(nI_n)_{n\geqslant 1}$?

ESCP BS 2023

Exercice 2

1) Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x>0\\ 4x(1-x^2) & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{si } x>1\end{cases}$.

Vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire X de densité f et on note F_X sa fonction de répartition.

2) a) Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.

b) Montrer que X possède une variance et vérifier qu'elle est égale à $\dfrac{11}{225}$.

3) Montrer que l'on a : $F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-(1-x^2)^2 & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$.

4) Soit U et V deux variables aléatoires à densité, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $M=\min(U,V)$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, on a $P(M>x)=P(U>x)P(V>x)$. On admet que M est une variable aléatoire à densité et on note F_M sa fonction de répartition.

a) En notant G la fonction de répartition commune à U et V, rappeler l'expression de $G(x)$ selon que $x<0$, $0\leq x\leq 1$ ou $x>1$.

b) En déduire, pour tout réel x, les expressions de $P(M>x)$ et de $F_M(x)$ en fonction de $G(x)$.

c) Donner enfin explicitement $F_M(x)$ selon que $x<0$, $0\leq x\leq 1$ ou $x>1$.

5) On considère la variable aléatoire Z définie par $Z=\sqrt{M}$ et on note F_Z sa fonction de répartition.

a) Déterminer $F_Z(x)$ selon que $x<0$, $0\leq x\leq 1$ ou $x>1$.

b) En déduire que X et Z suivent la même loi.

c) Compléter le script `Python` suivant qui simule la variable M à la ligne L3, afin qu'il simule la variable X à la ligne L4.

```
L1    U=rd.random()
L2    V=rd.random()
L3    M=np.min(U,V)
L4    X=---
```

ESCP BS 2024

Exercice 2

On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad et \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer un réel a tel que : $A^2 - 8A = aI$.
   (b) Montrer que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.
   (c) Déterminer les valeurs propres possibles de A.

2. (a) Résoudre $AX = 6X$, où X est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire les valeurs propres de A.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer PQ. En déduire que la matrice P est inversible ainsi que l'expression de son inverse P^{-1}.
   (b) Calculer AP et PD. En déduire que A est diagonalisable.
   (c) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dernière colonne de A^n vaut : $2^{n-2}\begin{pmatrix} 3^n - 1 \\ 3^n - 1 \\ 2(3^n + 1) \end{pmatrix}$.

4. **Application :** Lucile aime lire un livre avant de s'endormir. Elle possède trois types de livres : des livres de chevaux, des livres de dinosaures et des livres de princesses. Le choix du livre se fait en fonction du livre qu'elle a lu la veille selon le schéma suivant, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
   - si elle a lu un livre de chevaux le jour n, elle lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{1}{3}$,
   - si elle a lu un livre de princesses le jour n, elle lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{1}{3}$,
   - si elle a lu un livre de dinosaures le jour n, elle lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{2}{3}$.

   Le premier jour, elle lit un livre de dinosaures.
   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   - c_n la probabilité de l'événement C_n : "Lire un livre de chevaux le jour n",
   - p_n la probabilité de l'événement P_n : "Lire un livre de princesses le jour n",
   - d_n la probabilité de l'événement D_n : "Lire un livre de dinosaures le jour n".
   - $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

   (a) Que vaut X_1 ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (C_n, P_n, D_n), montrer que : $X_{n+1} = \frac{1}{6}AX_n$.
   (c) En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1$.
   (d) En utilisant la question 3d, montrer que $d_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n$.