Devoir sur table : 06/02/2025

ECRICOME 2024

Exercice 1

On considère trois suites $(r_n)_{n\geqslant 0}$, $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$ définies par la donnée de $r_0 = 2$, $s_0 = 10$ et $t_0 = 1$

$$\text{et, pour tout entier naturel } n, \qquad \begin{cases} r_{n+1} &= -\dfrac{1}{4}s_n + 2t_n \\ s_{n+1} &= r_n + s_n - t_n \\ t_{n+1} &= \dfrac{1}{2}t_n + 1. \end{cases}$$

On introduit les matrices

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose également $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

1. On pose $M = A - I$.
   (a) Expliciter la matrice M.
   (b) Montrer que $(2M + I)^3 = 0$.
   (c) En déduire que $M(8M^2 + 12M + 6I) = -I$.
   (d) Justifier que M est inversible et donner son inverse en fonction de M et de I.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.
3. (a) Vérifier que $AC + B = C$.
   (b) Montrer que $I - A$ est inversible.
   (c) En déduire que C est l'unique matrice colonne telle que $X = AX + B$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n - C = A^n(X_0 - C)$.
5. (a) Montrer que $(2A - I)^3 = 0$. En déduire que $\frac{1}{2}$ est la seule valeur propre possible de A.
   (b) On suppose dans cette question uniquement que A est diagonalisable.
      i. Montrer qu'il existe une matrice R inversible telle que $\frac{1}{2}I = R^{-1}AR$.
      ii. En déduire que $A = \frac{1}{2}I$.
      iii. Conclure que A n'est pas diagonalisable.
6. On définit les trois matrices

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer QP.
   (b) En déduire que P est inversible et donner son inverse à l'aide de la matrice Q.
   (c) Vérifier que $A = \frac{1}{4}PTQ$.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = \frac{1}{2^{n+1}}PT^nQ$.

(e) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet alors que, pour tout entier naturel n,

$$A^n = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n,

$$r_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\Big(3n^2 - 13n\Big), \quad s_n = 8 + \frac{1}{2^n}\Big(-3n^2 + 7n + 2\Big) \quad \text{et} \quad t_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

8. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right).$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

(b) Déterminer les limites des trois suites $(r_n)_{n\geqslant 0}$, $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$.