Devoir surveillé 3 (22/01) : Fonctions réelles d'une variable réelle, limites et continuité

1 Questions de cours

1) Donner l'interprétation géométrique de la parité et de l'imparité d'une fonction.
2) Donner la définition d'une fonction croissante.
3) Donner la définition d'une fonction continue en un point.
4) Donner la définition d'une fonction dérivable en un point.
5) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
6) Enoncer le théorème des bornes atteintes.

2 Catalogue des fonctions usuelles : la fonction exponentielle

- Propriétés algébriques : Enoncer les quatre propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

- Propriétés analytiques : domaine de définition, régularité, monotonie, limites en $\pm\infty$, croissances comparées et taux d'accroissement.

- Graphe : Proposer une esquisse du graphe de la fonction exponentielle.

3 Exercices

Exercice 1 (Qui est le plus grand ?)

1) Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in]0,+\infty[, f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
Etudier f et tracer son graphe.
2) Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.
3) Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

Exercice 2 (Prolongement par continuité)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{a(e^{x-1} - 1)}{x - 1} \text{ si } x < 1 \text{ et } f(x) = \frac{\sqrt{6x - 5} - b}{x - 1} \text{ si } x > 1.$$

1) Justifier que f est bien définie.
2) La fonction f admet-elle une limite à gauche en 1 ? Si oui, la déterminer.
3) a) On suppose que $b \neq 1$. Déterminer la limite à droite de f en 1.
3) b) On suppose que $b = 1$. Déterminer la limite à droite de f en 1.
4) Pour quelle(s) valeur(s) de a et de b la fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 1 ? On note $\tilde{f}$ un tel prolongement.
5) On se place sous les hypothèses de la question précédente. Préciser l'expression de $\tilde{f}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.