DS 1 : ESCP 2019 (3) + ESCP 2021 (4)

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 1 et $\overline{A}$ l'événement contraire d'un événement A. On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps. L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend du temps qu'il fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{4}{5}$;
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égale à $\frac{2}{5}$.

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- B_n l'événement : « il fait beau le jour n » ;
- $\overline{B_n}$ l'événement : « il fait mauvais le jour n » ;
- $u_n = P(B_n)$ et $v_n = P\left(\overline{B_n}\right)$.

1/ a/ Donner la valeur de u_1.

b/ Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$.

2/ a/ À l'aide de la formule des probabilités totales, établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n$$

b/ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_{n+1} en fonction de u_n.

c/ Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n.

d/ Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et interpréter le résultat.

3/ a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n$.

b/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la matrice à une ligne et deux colonnes suivante : $X_n = (u_n \quad v_n)$. Déterminer la matrice carrée K, indépendante de n, qui vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad X_{n+1} = X_n K$$

c/ À l'aide d'un raisonnement par récurrence, donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de X_{n+1} en fonction de X_1 et K.

d/ En déduire l'expression (sous forme de tableau) de la matrice K^n en fonction de n.

4/ On code un jour de beau temps par 1 et un jour de mauvais temps par 2.

On suppose que l'on a créé une fonction `simul()` qui renvoie une matrice contenant autant de 1 que de jours de beau temps et autant de 2 que de jours de mauvais temps, et ceci entre le deuxième et le centième jour.

Compléter le script PYTHON suivant afin qu'il renvoie le nombre de jours de beau temps lors des 100 premiers jours de la période considérée, y compris le premier.

```
A = simul() - 1
n = .....
print("le nombre de jours de beau temps est :", n)
```

5/ **a/** Soit U_n l'événement : « il fait beau pendant les n premiers jours de la période considérée ». Calculer $P(U_n)$.

b/ Soit V_n l'événement : « il fait beau au moins deux fois lors des n premiers jours de la période considérée ». Calculer $P(V_n)$.

Exercice 4 (probabilités discrètes)

On dispose d'une urne U_0 contenant deux boules noires et deux boules blanches, et d'urnes $U_1, U_2, U_3, \ldots$ contenant chacune deux boules blanches. On effectue des tirages selon le protocole suivant :

- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_0, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_1.
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_1, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_2.
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_2, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_3, et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne U_n après y avoir introduit les boules piochées dans l'urne U_{n-1}, mais avant de procéder au tirage suivant. On pose $X_0 = 2$.

1/ **a/** Montrer que la loi de la variable aléatoire X_1 est donnée par :

$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3} \qquad P(X_1 = 2) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}$$

b/ Calculer l'espérance de X_1.

2/ Pour tout entier naturel k, on note A_k l'événement : « on pioche deux boules noires dans l'urne U_k ». Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, l'événement $[X_n = 2]$ à l'aide de certains des événements A_k et en déduire que :

$$P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

3/ **a/** Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2)$$

b/ Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

c/ Donner la valeur de $P(X_n = 0)$ en fonction de n.

4/ Calculer, pour tout entier naturel n, l'espérance de X_n. Déterminer la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.