Devoir surveillé 4 (13/02) : Probabilités sur un univers fini

1 Questions de cours

Résoudre les cinq problèmes de dénombrement ci-dessous. *Toute réponse non justifiée se verra attribuée la note* 0.

1) On parie sur 12 combats de MMA en remplissant une grille composée de 12 lignes comportant chacune trois cases. A chaque combat, on choisit entre 1 (pour victoire du premier combattant), E (pour égalité) ou 2 (pour victoire du deuxième combattant). Combien y a-t-il de grilles possibles ?

2) 26 véhicules sont au départ d'une course de Formule 1. On suppose qu'il n'y a pas d'exæquo et que tous les véhicules terminent la course. Combien y a-t-il de podiums possibles (nombre de possibilités d'arrivée des trois premiers conducteurs) ?

3) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « probabilités » ?

4) Un sac contient 26 jetons sur lesquels sont inscrites les lettres de l'alphabet (une par jeton). On pioche simultanément 3 jetons.
Déterminer le nombre de tirages pour lesquels on pioche deux voyelles.

5) Un parti politique est composé de 50 membres. Ce dernier souhaite présenter une liste de candidats constitué de 12 personnes dont une tête de liste. Combien y a-t-il de listes possibles ?

2 Exercices

Exercice 1 (The Monty Hall problem)

Ce problème célèbre porte le nom de Monty Hall, un présentateur américain de jeux télévisés des années 60. Lors de l'ultime épreuve, un candidat du jeu a le choix entre trois portes. Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture de luxe et derrière les deux autres une chèvre. Dès qu'une porte est ouverte, le candidat remporte le lot qui y était caché.
Tout d'abord, le candidat choisit une des trois portes. A ce moment, Monty, qui sait ce qui se cache derrière les portes, ouvre une des deux autres portes. On y découvre une chèvre. Monty demande alors au candidat s'il souhaite conserver la porte choisie au départ ou s'il souhaite changer de porte.
1) Démontrer que si le candidat ne change pas de porte, alors il a une chance sur trois de gagner la voiture.
On pourra introduire les événements A : « le candidat a choisi la bonne porte au premier choix » et V : « le candidat gagne la voiture ».
2) Démontrer qu'en choisissant l'autre porte non ouverte, le candidat a deux chances sur trois de gagner.
3) A la lumière des deux questions précédentes, quelle stratégie recommandez-vous au candidat ?
4) On suppose que le candidat décide de changer de porte avec probabilité $p \in [0,1]$. Quelle est la probabilité qu'il gagne la voiture ?
5) Pour quelle valeur de p la probabilité précédente est-elle maximale ?

Exercice 2 (Le problème des enveloppes)

On met en vente 50 « enveloppes mystère ». Chaque joueur ouvre l'enveloppe immédiatement après l'avoir achetée et découvre s'il a gagné ou non. Une seule des enveloppes est gagnante.
Préférez-vous être le 1^{ier} acheteur ? Le $2^{\text{ième}}$? Le $3^{\text{ième}}$? Quel acheteur préférez-vous être ?

Exercice 3 (Un promeneur capricieux !)

Un promeneur capricieux se promène entre deux maisons, nommées A et B. A l'instant 0, il est en A. A chaque instant, il joue au dé la maison vers laquelle il va. S'il tire 1 ou 6, il change de maison, sinon il y reste. On définit les événements A_n : « le promeneur est en A à l'instant n » et B_n : « le promeneur est en B à l'instant n ».

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien vaut $a_n + b_n$?

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente une expression de a_{n+1} en fonction de a_n.

4) Calculer $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Calculer $P(B_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 4 (Un problème d'urnes)

On considère trois urnes A, B et C identiques : elles contiennent des boules blanches et des boules noires, avec une proportion $p \in [0, 1[$ de boules blanches.

On effectue n tirages avec remise. Au départ, on tire une boule dans l'urne A. Ensuite, si la boule tirée est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne, sinon on tire la boule suivante dans une des deux autres urnes, choisie équiprobablement. On continue cette règle jusqu'au $n^{\text{ième}}$ tirage.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle A_n l'événement « le $n^{\text{ième}}$ tirage est effectué dans l'urne A », B_n l'événement « le $n^{\text{ième}}$ tirage est effectué dans l'urne B », C_n l'événement « le $n^{\text{ième}}$ tirage est effectué dans l'urne C » et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

On note enfin $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Donner X_1.

2) En appliquant la formule des probabilités totales, démontrer qu'il existe une matrice M indépendante de n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = MX_n$.

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = M^{n-1}X_1$.

4) On note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = \left(\dfrac{3p-1}{2}\right)^n I_3 + \dfrac{1}{3}\left(1 - \left(\dfrac{3p-1}{2}\right)^n\right)J$.

5) En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

6) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent toutes les trois vers $1/3$.