# Problème 1 - ESCP 2025 (1)

# Partie I

## Division de la population en deux classes d'âge

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $u_n$ désigne la taille de la population des enfants à l'instant $n$, et $v_n$ celle de la population des adultes. On suppose

$$u_0 > 0, \qquad v_0 > 0,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + v_n, \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{9}u_n + \dfrac{2}{3}v_n. \end{cases}$$

On introduit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

## 1. Étude de la matrice $A$

### 1.(a) Vérifier que $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}$ est un polynôme annulateur de $A$

Calculons $A^2$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}+\frac{1}{9} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} \\ \frac{2}{27}+\frac{2}{27} & \frac{1}{9}+\frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$\frac{4}{3}A = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$A^2 - \frac{4}{3}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}I_2.$$

Ainsi,

$$A^2 - \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}I_2 = 0.$$

Donc le polynôme

$$P(X) = X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}$$

est bien un polynôme annulateur de $A$.

### 1.(b) En déduire les valeurs propres possibles de $A$

Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$. Puisque $P$ annule $A$, on sait que $P(\lambda) = 0$. Les valeurs propres possibles de $A$ sont donc les racines de $P$.

Résolvons

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0.$$

On factorise :

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = (x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Les valeurs propres possibles de $A$ sont donc

$$1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{3}.$$

**1.(c) Calculer $A\binom{3}{1}$ et $A\binom{3}{-1}$. En déduire les valeurs propres de $A$**

On calcule

$$A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 3+1\\ \frac{1}{9}\times 3+\frac{2}{3}\times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Comme $\binom{3}{1} \neq \binom{0}{0}$, $\binom{3}{1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

De même,

$$A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 3-1\\ \frac{1}{9}\times 3-\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}.$$

Comme $\binom{3}{-1} \neq \binom{0}{0}$, $\binom{3}{-1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{3}$.

On a ainsi effectivement montré que les valeurs propres de $A$ sont

$$1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{3}.$$

## 2. Diagonalisation de $A$

On définit

$$P = \begin{pmatrix}3 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -3\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

**2.(a) Calculer $PQ$**

On obtient

$$PQ = \begin{pmatrix}3 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{pmatrix} = 6I_2.$$

**2.(b) En déduire que $P$ est inversible et donner une expression matricielle de $P^{-1}$**

L'égalité

$$PQ = 6I_2$$

montre que

$$P\left(\frac{1}{6}Q\right) = I_2.$$

Ainsi $P$ est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{6}Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -3\end{pmatrix}.$$

**2.(c) Calculer $AP$ et $PD$. En déduire que $A$ est diagonalisable**

On calcule

$$AP = \left(A\tbinom{3}{1} \quad A\tbinom{3}{-1}\right) = \left(\tbinom{3}{1} \quad \frac{1}{3}\tbinom{3}{-1}\right) = \begin{pmatrix}3 & 1\\1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$PD = \begin{pmatrix}3 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$AP = PD.$$

Comme $P$ est inversible, on en tire

$$A = PDP^{-1}.$$

La matrice $A$ est donc diagonalisable.

### 2.(d) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

Nous allons raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
**Initialisation.** Pour $n = 0$,

$$PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I = A^0.$$

La propriété est vraie au rang 0.
**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Alors

$$A^{n+1} = A\,A^n = A\,PD^nP^{-1}.$$

Or, d'après la question précédente, $A = PDP^{-1}$. Par conséquent,

$$A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété est donc héréditaire.
On a ainsi montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

### 2.(e) En déduire une expression explicite de $A^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On commence par calculer

$$PD^n = \begin{pmatrix} 3 & 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 9 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n & 3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n & 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

## 3. Étude des suites $(u_n)$ et $(v_n)$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

**3.(a) Établir un lien entre $X_{n+1}$, $X_n$ et $A$**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$AX_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u_n + v_n \\ \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{pmatrix}.$$

D'après le système de récurrence, ce vecteur est précisément $X_{n+1}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = AX_n.$$

**3.(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$**

Nous raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
**Initialisation.** Pour $n = 0$,

$$A^0 X_0 = IX_0 = X_0.$$

La propriété est vraie au rang 0.
**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons

$$X_n = A^n X_0.$$

Alors, d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0.$$

La propriété est donc héréditaire.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0.$$

**3.(c) Déterminer $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$, $u_0$ et $v_0$**

On a

$$X_n = A^n X_0.$$

En utilisant l'expression explicite de $A^n$, on obtient

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 9 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n & 3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Par lecture de la première ligne,

$$u_n = \frac{1}{6}\left[\left(3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) u_0 + \left(9 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) v_0\right].$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{2}(u_0 + 3v_0) + \frac{1}{2}(u_0 - 3v_0)\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

De même,

$$v_n = \frac{1}{6}(u_0 + 3v_0) - \frac{1}{6}(u_0 - 3v_0)\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

**3.(d) Évolution de chaque population lorsque $n$ tend vers $+\infty$**

Comme $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$u_n \longrightarrow \frac{1}{2}(u_0 + 3v_0) \qquad \text{et} \qquad v_n \longrightarrow \frac{1}{6}(u_0 + 3v_0).$$

Ces limites sont strictement positives puisque $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$.
On en déduit que la population ne s'éteint pas, et ne diverge pas non plus. Elle converge vers un état d'équilibre.

### 4. Questions de base de données

On considère les deux tables suivantes de la base de données du zoo :
— **ANIMAUX** (Enclos, Espèce, Catégorie, Effectif, Quantité),
— **ALIMENTATION** (Espèce, Type, Tarif).
Chaque enclos ne contient qu'une seule catégorie d'une seule espèce.

#### 4.(a) Quelle clé primaire peut-on proposer pour la table ANIMAUX ?

Une clé primaire doit identifier de manière unique une ligne de la table.

D'après l'énoncé, dans un enclos donné, on trouve une seule catégorie d'une seule espèce. Autrement dit, deux lignes distinctes de la table ANIMAUX ne peuvent pas avoir le même numéro d'enclos.

On peut donc choisir comme clé primaire l'attribut :

Enclos

#### 4.(b) Requête SQL renvoyant la liste des types d'alimentation à utiliser dans le zoo

On veut obtenir les types d'alimentation effectivement nécessaires pour les espèces présentes dans le zoo. Il faut donc relier les tables ANIMAUX et ALIMENTATION par l'attribut **Espèce**.

Une requête convenable est :

```
SELECT DISTINCT ALIMENTATION.Type
FROM ANIMAUX
JOIN ALIMENTATION
ON ANIMAUX.Espece = ALIMENTATION.Espece;
```

Le mot-clé DISTINCT permet d'éviter les répétitions.

#### 4.(c) Requête SQL donnant la liste des espèces dont le nombre d'adultes est supérieur ou égal à 6

```
SELECT Espece
FROM ANIMAUX
WHERE Categorie = 'adulte' AND Effectif >= 6;
```

#### 4.(d) Requête SQL donnant la liste de l'espèce et de l'effectif des animaux dont le prix au kilogramme d'alimentation est strictement inférieur à 15

Il faut ici croiser les deux tables afin de récupérer les espèces dont le tarif alimentaire est strictement inférieur à 15.

Une requête possible est :

```
SELECT ANIMAUX.Espece, ANIMAUX.Effectif
FROM ANIMAUX
JOIN ALIMENTATION
ON ANIMAUX.Espece = ALIMENTATION.Espece
WHERE ALIMENTATION.Tarif < 15;
```

# Partie II

## Croissance à taux fixe et croissance logistique

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans sa globalité. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n$ la taille de la population à l'instant $n$. On suppose que la taille $w_0$ de la population à l'instant initial est strictement positive.

### 5. Croissance à taux fixe

Dans cette question uniquement, on suppose que la population possède une croissance à taux fixe, c'est-à-dire qu'elle varie d'un instant à l'autre d'une proportion fixe. Mathématiquement, on modélise une telle évolution par la donnée de $w_0 > 0$ et l'existence d'un réel $r \in [-1, +\infty[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n = r w_n.$$

**5.(a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $w_n$ en fonction de $n$, $r$ et $w_0$**

Soit $n \in \mathbb{N}$. La relation de récurrence donnée s'écrit

$$w_{n+1} = w_n + rw_n = (1+r)w_n.$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n$,

$$w_{n+1} = (1+r)w_n.$$

On en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1+r$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = w_0(1+r)^n.$$

**5.(b) Pourquoi a-t-on choisi $r \in [-1, +\infty[$ dans cette partie ?**

Le terme $w_n$ représente une taille de population. Il est donc naturel d'imposer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n \geq 0.$$

Or, d'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = w_0(1+r)^n,$$

avec $w_0 > 0$. Pour que tous les termes de la suite soient positifs ou nuls, il faut que

$$1 + r \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$r \geq -1.$$

Le choix $r \in [-1, +\infty[$ garantit donc que le coefficient multiplicatif $1+r$ est positif ou nul, et que le modèle ne conduit pas à des tailles de population négatives.

**5.(c) En distinguant les cas $r \in [-1, 0[$, $r = 0$ et $r > 0$, déterminer, si elle existe, la limite de $w_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Que signifie chacune de ces limites pour l'évolution de la population ? Le modèle proposé est-il toujours réaliste ?**

On distingue les cas demandés.

**Premier cas :** $r \in [-1, 0[$ Alors

$$0 \leq 1 + r < 1.$$

- Si $r = -1$, alors $1 + r = 0$, donc pour tout $n \geq 1$,

$$w_n = 0.$$

La suite converge donc vers 0.

- Si $r \in ]-1, 0[$, alors $1 + r \in ]0, 1[$. La suite géométrique $\left((1+r)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Comme $w_0 > 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0.$$

Dans ce cas, la population tend vers 0 : il y a extinction.

**Deuxième cas :** $r = 0$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = w_0(1+0)^n = w_0.$$

La suite est donc constante et converge vers $w_0$. La population reste constante au cours du temps.

**Troisième cas :** $r > 0$ Alors

$$1 + r > 1.$$

La suite géométrique $\left((1+r)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Puisque $w_0 > 0$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty.$$

Dans ce cas, la population explose.

**Interprétation** - si $r \in [-1, 0[$, la population s'éteint ; - si $r = 0$, la population reste constante ; - si $r > 0$, la population croît sans borne.

Ce modèle n'est pas toujours réaliste. En effet, lorsque $r > 0$, il prévoit une croissance illimitée de la population, sans tenir compte des contraintes du milieu. Or, dans une situation réelle, les ressources sont limitées. C'est précisément ce que le modèle logistique cherche à prendre en compte.

## 6. Croissance logistique

Dans cette question uniquement, on suppose que la population possède une croissance logistique, prenant en compte l'influence du milieu dans lequel elle vit. Mathématiquement, on modélise une telle évolution par la donnée de $w_0 > 0$ et l'existence de deux réels $\alpha \in ]0, 1[$ et $\beta > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n = \alpha w_n \left(1 - \frac{1}{\beta} w_n\right).$$

On définit les fonctions $f$ et $g$ par

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \alpha x \left(1 - \frac{x}{\beta}\right),$$

et

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x + f(x),$$

de sorte que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} = w_n + f(w_n) = g(w_n).$$

**6.(a)(i) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \alpha x \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) = 0.$$

Comme $\alpha > 0$, on obtient

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 - \frac{x}{\beta} = 0.$$

La seconde égalité équivaut à $x = \beta$. Finalement,

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{0, \beta\}.$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont donc 0 et $\beta$.

**6.(a)(ii) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $[0, +\infty[$ en précisant sa limite en $+\infty$. On fera apparaître les réels obtenus à la question précédente**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \alpha x - \frac{\alpha}{\beta} x^2.$$

La fonction $f$ est un polynôme de degré 2, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \alpha - \frac{2\alpha}{\beta} x = \alpha \left(1 - \frac{2x}{\beta}\right).$$

Comme $\alpha > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \dfrac{2x}{\beta}$. Ainsi :

- si $x < \dfrac{\beta}{2}$, alors $f'(x) > 0$ ; - si $x = \dfrac{\beta}{2}$, alors $f'(x) = 0$ ; - si $x > \dfrac{\beta}{2}$, alors $f'(x) < 0$.

On en déduit que $f$ est croissante sur $\left[0, \dfrac{\beta}{2}\right]$, puis décroissante sur $\left[\dfrac{\beta}{2}, +\infty\right[$.

Calculons la valeur de $f$ en $\dfrac{\beta}{2}$ :

$$f\left(\frac{\beta}{2}\right) = \alpha \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha\beta}{4}.$$

Enfin,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Le tableau de variations de $f$ sur $[0, +\infty[$ est donc le suivant :

- $f(0) = 0$, - $f$ croît de 0 jusqu'à $\dfrac{\alpha\beta}{4}$ sur $\left[0, \dfrac{\beta}{2}\right]$, - puis $f$ décroît, - $f(\beta) = 0$, - et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

**6.(b)(i) Résoudre les équations $g(x) = 0$, $g(x) = x$ et $g(x) = \beta$ sur $\mathbb{R}$**

**Résolution de** $g(x) = 0$ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g(x) = 0 \iff x + \alpha x \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) = 0.$$

On factorise par $x$ :

$$x\left(1 + \alpha - \frac{\alpha}{\beta}x\right) = 0.$$

Donc

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 + \alpha - \frac{\alpha}{\beta}x = 0.$$

La seconde équation donne

$$x = \frac{(1+\alpha)\beta}{\alpha}.$$

Ainsi,

$$g(x) = 0 \iff x \in \left\{0, \frac{(1+\alpha)\beta}{\alpha}\right\}.$$

**Résolution de** $g(x) = x$ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g(x) = x \iff x + f(x) = x \iff f(x) = 0.$$

D'après la question 6.(a)(i), cela équivaut à

$$x \in \{0, \beta\}.$$

**Résolution de** $g(x) = \beta$ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g(x) = \beta \iff x + \alpha x \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) = \beta.$$

En développant,

$$(1+\alpha)x - \frac{\alpha}{\beta}x^2 = \beta.$$

En multipliant par $\beta$,

$$(1+\alpha)\beta x - \alpha x^2 = \beta^2.$$

On réécrit :

$$\alpha x^2 - (1+\alpha)\beta x + \beta^2 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = ((1+\alpha)\beta)^2 - 4\alpha\beta^2 = \beta^2\big((1+\alpha)^2 - 4\alpha\big) = \beta^2(1-\alpha)^2.$$

Les solutions sont donc

$$x = \frac{(1+\alpha)\beta \pm \beta(1-\alpha)}{2\alpha}.$$

On obtient

$$x = \beta \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ainsi,

$$g(x) = \beta \iff x \in \left\{\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right\}.$$

**6.(b)(ii) Montrer que**

$$\beta < \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}.$$

Comme $\beta > 0$, il suffit de comparer les coefficients.

**Première inégalité** Montrons que

$$\beta < \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}.$$

Comme $\beta > 0$, cela équivaut à

$$1 < \frac{\alpha+1}{2\alpha}.$$

En multipliant par $2\alpha > 0$, on obtient

$$2\alpha < \alpha + 1 \iff \alpha < 1,$$

ce qui est vrai puisque $\alpha \in ]0, 1[$.

**Deuxième inégalité** Montrons que

$$\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}.$$

Comme $\dfrac{\beta}{\alpha} > 0$, cela équivaut à

$$\frac{\alpha+1}{2} < 1 \iff \alpha + 1 < 2 \iff \alpha < 1,$$

ce qui est encore vrai.

**Troisième inégalité** Montrons que

$$\frac{\beta}{\alpha} < \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}.$$

Comme $\dfrac{\beta}{\alpha} > 0$, cela équivaut à

$$1 < \alpha + 1,$$

ce qui est évident puisque $\alpha > 0$.

On a donc bien montré que

$$\beta < \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}.$$

**6.(b)(iii) Dresser le tableau de variations de la fonction $g$ sur $[0, +\infty[$ en précisant sa limite en $+\infty$. On fera apparaître les réels obtenus à la question 6.(b)(i)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = x + \alpha x\left(1 - \frac{x}{\beta}\right) = (1+\alpha)x - \frac{\alpha}{\beta}x^2.$$

La fonction $g$ est un polynôme de degré 2, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 1 + \alpha - \frac{2\alpha}{\beta}x.$$

On résout

$$g'(x) = 0 \iff 1 + \alpha - \frac{2\alpha}{\beta}x = 0 \iff x = \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}.$$

- si $x < \dfrac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}$, alors $g'(x) > 0$ ; - si $x = \dfrac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}$, alors $g'(x) = 0$ ; - si $x > \dfrac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}$, alors $g'(x) < 0$. Ainsi :

- $g$ est croissante sur $\left[0, \dfrac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right]$, - $g$ est décroissante sur $\left[\dfrac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}, +\infty\right[$.

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

On fait apparaître les valeurs obtenues à la question 6.(b)(i) :

$$g(0) = 0, \qquad g(\beta) = \beta, \qquad g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \beta, \qquad g\left(\frac{(1+\alpha)\beta}{\alpha}\right) = 0.$$

Compte tenu de l'ordre établi à la question 6.(b)(ii), le tableau de variations de $g$ sur $[0, +\infty[$ s'interprète ainsi :

- $g$ part de 0 en 0, - croît jusqu'à son maximum atteint en $\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}$, - puis décroît, - vaut $\beta$ en $\beta$ puis à nouveau $\beta$ en $\frac{\beta}{\alpha}$, - s'annule en $\frac{(1+\alpha)\beta}{\alpha}$, - puis tend vers $-\infty$.

## 6.(c) Étude de la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $w_0 \in ]0, \beta]$

On suppose dans cette question uniquement que

$$w_0 \in ]0, \beta].$$

**6.(c)(i) En utilisant le tableau de variations de la fonction $g$ obtenu à la question 6.(b)(iii), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in [0, \beta]$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$**

Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n \in [0, \beta].$$

**Initialisation.** Par hypothèse,

$$w_0 \in ]0, \beta] \subset [0, \beta].$$

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$w_n \in [0, \beta].$$

Comme $g$ est croissante et que

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(\beta) = \beta,$$

on obtient

$$w_{n+1} = g(w_n) \in [0, \beta].$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n \in [0, \beta].$$

**6.(c)(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $f(w_n)$ à l'aide du tableau de variations de la fonction $f$ obtenu à la question 6.(a)(ii). En déduire la monotonie de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n \in [0, \beta].$$

Or, d'après le tableau de variations de $f$, la fonction $f$ s'annule en 0 et $\beta$, et est positive sur $[0, \beta]$. Plus précisément,

$$\forall x \in [0, \beta], \qquad f(x) \geq 0.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(w_n) \geq 0.$$

Comme

$$w_{n+1} - w_n = f(w_n),$$

on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n \geq 0.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

**6.(c)(iii) Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $\ell$**

D'après la question 6.(c)(i), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n \leq \beta.$$

La suite $(w_n)$ est donc majorée par $\beta$. D'autre part, d'après la question 6.(c)(ii), elle est croissante.

Une suite réelle croissante et majorée est convergente. On en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$.

**6.(c)(iv) Montrer que $\ell \geq w_0$**

La suite $(w_n)$ est croissante. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n \geq w_0.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\ell \geq w_0.$$

**6.(c)(v) À l'aide de la question 6.(b)(i), déterminer la valeur de $\ell$ en fonction de $\beta$. Que signifie ce résultat pour la population étudiée ?**

La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, car c'est un polynôme. Comme $w_n \to \ell$, on peut passer à la limite dans la relation

$$w_{n+1} = g(w_n).$$

On obtient

$$\ell = g(\ell).$$

D'après la question 6.(b)(i), les solutions de l'équation $g(x) = x$ sont 0 et $\beta$. Donc

$$\ell \in \{0, \beta\}.$$

Or, d'après la question précédente,

$$\ell \geq w_0.$$

Comme $w_0 > 0$, on a $\ell > 0$. Donc $\ell \neq 0$. Par suite,

$$\ell = \beta.$$

La suite $(w_n)$ converge donc vers $\beta$.

**Interprétation** Cela signifie que, lorsque la taille initiale de la population est comprise entre 0 et $\beta$, la population se stabilise à long terme vers la valeur $\beta$. Cette valeur apparaît comme un équilibre du modèle. Elle représente une capacité d'accueil du milieu.

## 6.(d) Étude de la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $w_0 \in [\beta, \beta/\alpha]$

On suppose dans cette question uniquement que

$$w_0 \in \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right].$$

**6.(d)(i) Montrer que**

$$g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right) < \frac{\beta}{\alpha}$$

**et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right]$**

Comme $g$ atteint son maximum sur $[0, +\infty[$ au point

$$x_0 = \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha},$$

il suffit de calculer $g(x_0)$.

On a

$$g(x) = (1+\alpha)x - \frac{\alpha}{\beta}x^2.$$

Ainsi,

$$g(x_0) = (1+\alpha)\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

On obtient

$$g(x_0) = \frac{(\alpha+1)^2\beta}{2\alpha} - \frac{(\alpha+1)^2\beta}{4\alpha} = \frac{(\alpha+1)^2\beta}{4\alpha}.$$

Montrons que

$$\frac{(\alpha+1)^2\beta}{4\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}.$$

Comme $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, cela équivaut à

$$\frac{(\alpha+1)^2}{4} < 1 \iff (\alpha+1)^2 < 4.$$

Or $\alpha \in ]0,1[$, donc $1 < \alpha+1 < 2$, et par conséquent $(\alpha+1)^2 < 4$. On a donc bien

$$g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right) < \frac{\beta}{\alpha}.$$

En outre, d'après la question 6.(b)(i),

$$g(\beta) = \beta \qquad \text{et} \qquad g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \beta.$$

Comme $g$ est croissante puis décroissante, et comme son maximum sur $[\beta, \beta/\alpha]$ est strictement inférieur à $\beta/\alpha$, on obtient

$$g\left(\left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right]\right) \subset \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right].$$

Montrons alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n \in \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right].$$

- C'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse. - Supposons que $w_n \in \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right]$. Alors

$$w_{n+1} = g(w_n) \in \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right].$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**6.(d)(ii) Étudier la monotonie de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n \in \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right].$$

Or, sur l'intervalle $\left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right]$, on a

$$1 - \frac{x}{\beta} \leq 0,$$

donc

$$f(x) = \alpha x \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) \leq 0.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(w_n) \leq 0.$$

Comme

$$w_{n+1} - w_n = f(w_n),$$

on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n \leq 0.$$

La suite $(w_n)$ est donc décroissante.

**6.(d)(iii) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. Que signifie ce résultat pour la population étudiée ?**

La suite $(w_n)$ est décroissante, et d'après la question 6.(d)(i), elle est minorée par $\beta$. Une suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Notons $\ell$ sa limite. La fonction $g$ étant continue, on peut passer à la limite dans

$$w_{n+1} = g(w_n),$$

ce qui donne

$$\ell = g(\ell).$$

D'après la question 6.(b)(i), on a alors

$$\ell \in \{0, \beta\}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n \geq \beta.$$

En passant à la limite,

$$\ell \geq \beta > 0.$$

Donc $\ell \neq 0$, puis

$$\ell = \beta.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \beta.$$

**Interprétation** Lorsque la taille initiale de la population appartient à $\left[\beta, \dfrac{\beta}{\alpha}\right]$, la population décroît et se stabilise vers la valeur d'équilibre $\beta$.

## 6.(e) Étude de la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $w_0 \in \left[\dfrac{\beta}{\alpha}, \dfrac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right[$

On suppose dans cette question uniquement que

$$w_0 \in \left[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right[.$$

**6.(e)(i) En utilisant la question 6.(b)(iii), justifier que $w_1 \in ]0, \beta]$**

On a

$$w_1 = g(w_0).$$

Or, d'après la question 6.(b)(iii), la fonction $g$ est décroissante sur

$$\left[\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}, +\infty\right[.$$

D'après la question 6.(b)(ii),

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}.$$

Donc $g$ est décroissante sur l'intervalle

$$\left[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right[.$$

Comme

$$w_0 \in \left[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right[,$$

on obtient, par décroissance de $g$,

$$g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right) < g(w_0) \leq g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Or, d'après la question 6.(b)(i),

$$g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right)=0 \qquad \text{et} \qquad g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\beta.$$

Ainsi,

$$0<w_1\leq\beta,$$

c'est-à-dire

$$w_1\in]0,\beta].$$

**6.(e)(ii) À l'aide de la question 6.(c), justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite**

D'après la question précédente,

$$w_1\in]0,\beta].$$

La suite $(w_n)_{n\geq 1}$ vérifie alors les hypothèses de la question 6.(c). On peut donc appliquer le résultat obtenu dans cette question à la suite décalée $(w_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit que cette suite converge vers $\beta$.

Par conséquent, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même converge vers $\beta$ :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n=\beta.$$

**6.(f) Est-il judicieux de choisir $w_0\geq\dfrac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$ ?**

La réponse est non.

En effet, d'après la question 6.(b)(i),

$$g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right)=0.$$

D'autre part, d'après la question 6.(b)(iii), la fonction $g$ est décroissante sur

$$\left[\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha},+\infty\right[.$$

Or, d'après la question 6.(b)(ii),

$$\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}>\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}.$$

Ainsi, $g$ est décroissante sur

$$\left[\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha},+\infty\right[.$$

Soit alors $x\geq\dfrac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$. Par décroissance de $g$,

$$g(x)\leq g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right)=0.$$

On a donc montré que

$$\forall x\in\left[\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha},+\infty\right[, \qquad g(x)\leq 0.$$

Par conséquent, si

$$w_0\geq\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha},$$

alors

$$w_1=g(w_0)\leq 0.$$

Or $w_1$ représente une taille de population. Une valeur négative n'a pas de sens dans ce contexte, et la valeur 0 correspond à une extinction immédiate. Il n'est donc pas judicieux de choisir une taille initiale

$$w_0\geq\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}.$$

# Problème 2 - Ecricome 2020 (3)

On considère deux guichets. Les clients $A$ et $B$ sont servis immédiatement, tandis que le client $C$ attend qu'un des deux guichets se libère. On note $X$, $Y$, $Z$ les durées de service des clients $A$, $B$, $C$. On suppose que $X \sim \mathcal{E}(a)$, $Y \sim \mathcal{E}(b)$ avec $a > 0$, $b > 0$, et que $X$ et $Y$ sont indépendantes.

## 1)

Puisque $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $a > 0$, sa fonction de répartition est définie, pour tout réel $x$, par

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Une densité de $X$ est donc la fonction

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ ae^{-ax} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Enfin,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{a^2}.$$

## 2)

On note $T$ le temps d'attente du client $C$. Par définition, $T = \min(X, Y)$.

**a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$T > x \iff \min(X, Y) > x.$$

Cette condition est équivalente au fait que $X > x$ et $Y > x$. Ainsi,

$$[T > x] = [X > x] \cap [Y > x].$$

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Par indépendance de $X$ et $Y$,

$$\mathbb{P}(T > x) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > x).$$

Or, pour $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-ax} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y > x) = e^{-bx}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(T > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ e^{-(a+b)x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

**c)** Pour tout réel $x$,

$$\mathbb{P}(T \leq x) = 1 - \mathbb{P}(T > x).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-(a+b)x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $a + b$. Donc

$$T \sim \mathcal{E}(a + b).$$

**d)** Comme $[T > 5] \subset [T > 2]$, on a

$$\mathbb{P}(T > 5 \mid T > 2) = \frac{\mathbb{P}(T > 5)}{\mathbb{P}(T > 2)}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(T > 5 \mid T > 2) = \frac{e^{-5(a+b)}}{e^{-2(a+b)}} = e^{-3(a+b)}.$$

### 3)

On simule $T = \min(X, Y)$ de la manière suivante :

```
def simul(a,b):
    T = np.zeros(10000)
    for k in range(10000):
        X = rd.exponential(1/a)
        Y = rd.exponential(1/b)
        if Y > X:
            T[k] = X
        else:
            T[k] = Y
    return T
```

### 4)

On suppose désormais $a = b = \frac{1}{2}$ et $Z \sim \mathcal{E}(1)$ indépendante de $X$ et $Y$. On pose $V = T + Z$.

**a)** La fonction `simul2` retourne la fréquence empirique de l'événement $[V > 2]$ sur 10000 simulations. Elle fournit donc une valeur approchée de $\mathbb{P}(V > 2)$.

**b)** Les valeurs obtenues sont proches car, d'après la loi faible des grands nombres, une fréquence empirique converge vers la probabilité théorique lorsque le nombre d'expériences augmente.

### 5)

**a)** Soit $A > 0$. Par intégration par parties,

$$\int_0^A xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^A + \int_0^A e^{-x}\,dx = -Ae^{-A} + \left[-e^{-x}\right]_0^A = 1 - e^{-A} - Ae^{-A}.$$

**b)** On calcule

$$\int_0^A x^2e^{-x}\,dx = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^A + 2\int_0^A xe^{-x}\,dx = -A^2e^{-A} + 2\big(1 - e^{-A} - Ae^{-A}\big) = 2 - (A^2 + 2A + 2)e^{-A}.$$

**c)** La fonction $g$ est positive. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1.$$

Donc $g$ est une densité.

**d)** On a

$$\mathbb{P}(V \leq 2) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^2 xe^{-x}\,dx = 1 - 3e^{-2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(V > 2) = 3e^{-2} \approx 0,42.$$

COmme $0,42$ est proche des nombres obtenus à la question 4, le résultat obtenu est cohérent.

**e)** On a

$$\mathbb{E}(V) = \int_{-\infty}^{0} xg(x)\,dx + \int_0^{+\infty} xg(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx = 2.$$

On retrouve également ce résultat par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(T) + \mathbb{E}(Z) = 1 + 1 = 2.$$

## Problème 3 - Ecricome 2024 (3)

On considère les trois suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$ définies par

$$a_1 = \frac{3}{8}, \qquad b_1 = 0, \qquad c_1 = \frac{5}{8},$$

et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2}{11}a_n + \dfrac{3}{11}b_n + \dfrac{3}{11}c_n, \\ b_{n+1} = \dfrac{4}{11}a_n + \dfrac{3}{11}b_n + \dfrac{4}{11}c_n, \\ c_{n+1} = \dfrac{5}{11}a_n + \dfrac{5}{11}b_n + \dfrac{4}{11}c_n. \end{cases}$$

**1.** Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n + b_n + c_n = 1$.

Montrons ce résultat par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Pour $n = 1$,

$$a_1 + b_1 + c_1 = \frac{3}{8} + 0 + \frac{5}{8} = 1.$$

La propriété est donc vraie au rang 1.
Soit maintenant $n \geqslant 1$. Supposons que

$$a_n + b_n + c_n = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &= \left(\frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n\right) + \left(\frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n\right) \\ &\quad + \left(\frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n\right) \\ &= \frac{11}{11}a_n + \frac{11}{11}b_n + \frac{11}{11}c_n \\ &= a_n + b_n + c_n \\ &= 1. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.
On en déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\boxed{a_n + b_n + c_n = 1.}$$

**2.** On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$x_n = a_n + b_n + c_n.$$

Déterminer la nature de la suite $(x_n)$ puis exprimer $x_n$ en fonction de $n$.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$x_n = a_n + b_n + c_n = 1.$$

La suite $(x_n)$ est donc constante.
Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\boxed{x_n = 1.}$$

**3.** On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$y_n = -a_n + 2b_n - c_n.$$

**a)** Montrer que la suite $(y_n)$ est géométrique.

Soit $n \geqslant 1$. On a

$$y_{n+1} = -a_{n+1} + 2b_{n+1} - c_{n+1}.$$

En remplaçant $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ par leurs expressions, il vient

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= -\left(\frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n\right) + 2\left(\frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n\right) \\
&\quad - \left(\frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n\right) \\
&= \left(-\frac{2}{11} + \frac{8}{11} - \frac{5}{11}\right)a_n + \left(-\frac{3}{11} + \frac{6}{11} - \frac{5}{11}\right)b_n + \left(-\frac{3}{11} + \frac{8}{11} - \frac{4}{11}\right)c_n \\
&= \frac{1}{11}a_n - \frac{2}{11}b_n + \frac{1}{11}c_n \\
&= -\frac{1}{11}\left(-a_n + 2b_n - c_n\right) \\
&= -\frac{1}{11}y_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$y_{n+1} = -\frac{1}{11}y_n.$$

La suite $(y_n)$ est donc géométrique, de raison

$$\boxed{-\frac{1}{11}.}$$

**b)** Exprimer $y_n$ en fonction de $n$.

Calculons le premier terme :

$$y_1 = -a_1 + 2b_1 - c_1 = -\frac{3}{8} + 0 - \frac{5}{8} = -1.$$

La suite $(y_n)$ étant géométrique de raison $-\frac{1}{11}$, on obtient, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$y_n = y_1\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

Donc

$$\boxed{y_n = -\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.}$$

**4.** On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$z_n = -5a_n - 5b_n + 7c_n.$$

**a)** Montrer que la suite $(z_n)$ est géométrique.

Soit $n \geqslant 1$. On a

$$z_{n+1} = -5a_{n+1} - 5b_{n+1} + 7c_{n+1}.$$

En remplaçant $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ par leurs expressions, on obtient

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= -5\left(\frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n\right) - 5\left(\frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n\right) \\
&\quad + 7\left(\frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n\right) \\
&= \left(-\frac{10}{11} - \frac{20}{11} + \frac{35}{11}\right)a_n + \left(-\frac{15}{11} - \frac{15}{11} + \frac{35}{11}\right)b_n + \left(-\frac{15}{11} - \frac{20}{11} + \frac{28}{11}\right)c_n \\
&= \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n - \frac{7}{11}c_n \\
&= -\frac{1}{11}\left(-5a_n - 5b_n + 7c_n\right) \\
&= -\frac{1}{11}z_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$z_{n+1} = -\frac{1}{11} z_n.$$

La suite $(z_n)$ est donc géométrique, de raison

$$\boxed{-\frac{1}{11}.}$$

**b)** Exprimer $z_n$ en fonction de $n$.

Calculons $z_1$ :

$$z_1 = -5a_1 - 5b_1 + 7c_1 = -5 \cdot \frac{3}{8} - 5 \cdot 0 + 7 \cdot \frac{5}{8} = \frac{-15+35}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}.$$

On en déduit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$z_n = z_1 \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{z_n = \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.}$$

**5.a) Expression de $b_n$ et $c_n$**

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$x_n = a_n + b_n + c_n \quad \text{et} \quad y_n = -a_n + 2b_n - c_n.$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient

$$x_n + y_n = 3b_n.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n).$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$z_n = -5a_n - 5b_n + 7c_n.$$

Or

$$x_n = a_n + b_n + c_n,$$

donc

$$5x_n = 5a_n + 5b_n + 5c_n.$$

En additionnant ces deux égalités, il vient

$$z_n + 5x_n = 12c_n.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq 1, \quad c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n).$$

**5.b) Expression de $a_n$**

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$a_n = x_n - b_n - c_n.$$

En remplaçant $b_n$ et $c_n$ par leurs expressions, il vient

$$a_n = x_n - \frac{1}{3}(x_n + y_n) - \frac{1}{12}(5x_n + z_n).$$

On met au même dénominateur :

$$a_n = \frac{12x_n - 4x_n - 4y_n - 5x_n - z_n}{12}.$$

Ainsi,
$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{1}{12}(3x_n - 4y_n - z_n).$$

**5.c) Expression de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$**

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a
$$x_n = 1, \quad y_n = -\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}, \quad z_n = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

On en déduit que
$$b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right),$$
donc
$$\forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

De même,
$$c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n) = \frac{1}{12}\left(5 + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right),$$
d'où
$$\forall n \geq 1, \quad c_n = \frac{5}{12} + \frac{5}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

Enfin,
$$a_n = \frac{1}{12}(3x_n - 4y_n - z_n),$$
donc
$$a_n = \frac{1}{12}\left(3 + 4\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right).$$
Or
$$4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2},$$
donc
$$a_n = \frac{1}{12}\left(3 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right).$$
Ainsi,
$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

**6) Limites**

On a
$$\left|-\frac{1}{11}\right| < 1,$$
donc
$$\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{5}{12}.$$

On considère maintenant un étang contenant 3 goujons, 5 truites et 4 perches. On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$g_n = \mathbb{P}(G_n), \qquad p_n = \mathbb{P}(P_n), \qquad t_n = \mathbb{P}(T_n),$$
où $G_n$, $P_n$ et $T_n$ désignent respectivement les événements “le $n$-ième poisson pêché est un goujon”, “le $n$-ième poisson pêché est une perche” et “le $n$-ième poisson pêché est une truite”.

**7.** Déterminer $g_1$, $p_1$ et $t_1$.

D'après l'énoncé, aucune perche ne peut être pêchée en premier. Le premier poisson pêché est donc soit un goujon, soit une truite. Il y a 3 goujons et 5 truites, soit 8 poissons possibles.

Ainsi,

$$\boxed{g_1 = \frac{3}{8}, \qquad p_1 = 0, \qquad t_1 = \frac{5}{8}.}$$

**8.** Déterminer $\mathbb{P}(G_2 \mid G_1)$, $\mathbb{P}(G_2 \mid T_1)$, puis $g_2$.

**a)** Si le premier poisson pêché est un goujon, il reste 11 poissons, dont 2 goujons. Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(G_2 \mid G_1) = \frac{2}{11}.}$$

Si le premier poisson pêché est une truite, il reste 11 poissons, dont 3 goujons. Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(G_2 \mid T_1) = \frac{3}{11}.}$$

**b)** Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(G_2 \mid G_1)\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2 \mid T_1)\mathbb{P}(T_1).$$

On obtient

$$g_2 = \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{8} = \frac{6+15}{88} = \frac{21}{88}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{g_2 = \frac{21}{88}.}$$

**9.** Déterminer $\mathbb{P}(T_1 \mid G_2)$.

Par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(T_1 \mid G_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_2)}.$$

Or

$$\mathbb{P}(T_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(T_1)\mathbb{P}(G_2 \mid T_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{11} = \frac{15}{88},$$

et

$$\mathbb{P}(G_2) = \frac{21}{88}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_1 \mid G_2) = \frac{15/88}{21/88} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T_1 \mid G_2) = \frac{5}{7}.}$$

**10.**

**a)** Déterminer $\mathbb{P}(G_{n+1} \mid G_n)$, $\mathbb{P}(G_{n+1} \mid P_n)$ et $\mathbb{P}(G_{n+1} \mid T_n)$.

Soit $n \geqslant 1$.

Si le $n$-ième poisson pêché est un goujon, alors il reste dans l'étang 11 poissons, dont 2 goujons. Donc

$$\mathbb{P}(G_{n+1} \mid G_n) = \frac{2}{11}.$$

Si le $n$-ième poisson pêché est une perche, alors il reste 11 poissons, dont 3 goujons. Donc

$$\mathbb{P}(G_{n+1} \mid P_n) = \frac{3}{11}.$$

Si le $n$-ième poisson pêché est une truite, alors il reste aussi 11 poissons, dont 3 goujons. Donc

$$\mathbb{P}(G_{n+1} \mid T_n) = \frac{3}{11}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(G_{n+1} \mid G_n) = \frac{2}{11}, \qquad \mathbb{P}(G_{n+1} \mid P_n) = \frac{3}{11}, \qquad \mathbb{P}(G_{n+1} \mid T_n) = \frac{3}{11}.}$$

**b)** En déduire une relation de récurrence vérifiée par $(g_n)$.

Les événements $G_n$, $P_n$ et $T_n$ forment un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= \mathbb{P}(G_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(G_n)\mathbb{P}(G_{n+1} \mid G_n) + \mathbb{P}(P_n)\mathbb{P}(G_{n+1} \mid P_n) + \mathbb{P}(T_n)\mathbb{P}(G_{n+1} \mid T_n). \end{aligned}$$

D'après la question 10.a, on obtient

$$\boxed{g_{n+1} = \frac{2}{11}g_n + \frac{3}{11}p_n + \frac{3}{11}t_n.}$$

**c)** Établir de même des relations de récurrence vérifiées par $(p_n)$ et $(t_n)$.

Raisonnons de la même manière.

Pour les perches, si le $n$-ième poisson pêché est un goujon, il reste 4 perches sur 11 poissons. Si le $n$-ième poisson pêché est une perche, il en reste 3 sur 11 poissons. Si le $n$-ième poisson pêché est une truite, il reste 4 perches sur 11 poissons. Ainsi,

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{4}{11}g_n + \frac{3}{11}p_n + \frac{4}{11}t_n.}$$

Pour les truites, si le $n$-ième poisson pêché est un goujon, il reste 5 truites sur 11 poissons. Si le $n$-ième poisson pêché est une perche, il reste aussi 5 truites sur 11 poissons. Si le $n$-ième poisson pêché est une truite, il reste 4 truites sur 11 poissons. Donc

$$\boxed{t_{n+1} = \frac{5}{11}g_n + \frac{5}{11}p_n + \frac{4}{11}t_n.}$$

**11.** En déduire les expressions de $g_n$, $p_n$ et $t_n$.

Les suites $(g_n)$, $(p_n)$ et $(t_n)$ vérifient exactement le même système de récurrence que les suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$. De plus,

$$g_1 = \frac{3}{8} = a_1, \qquad p_1 = 0 = b_1, \qquad t_1 = \frac{5}{8} = c_1.$$

Par unicité d'une suite définie par ses valeurs initiales et ses relations de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$g_n = a_n, \qquad p_n = b_n, \qquad t_n = c_n.$$

Les expressions obtenues à la question 6 donnent donc

$$\boxed{g_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1},}$$

$$\boxed{p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1},}$$

$$\boxed{t_n = \frac{5}{12} + \frac{5}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.}$$

**12.**

**a)** Donner la clé primaire de la table.

La clé primaire est l'attribut permettant d'identifier de manière unique chaque enregistrement. Ici, il s'agit de

$$\boxed{\texttt{id.}}$$

**b)** Écrire une requête SQL permettant de modifier la taille du goujon et de lui attribuer la valeur 610.

La requête demandée est

```
UPDATE poissons
SET taille = 610
WHERE espece = 'goujon';
```

**c)** Écrire une requête SQL permettant d'afficher les poissons non protégés dont la taille est supérieure ou égale à 125.

La requête demandée est

```
SELECT *
FROM poissons
WHERE protection = 0 AND taille >= 125;
```

**13.** On note $U$ la variable aléatoire qui vaut 1 si un poisson est pêché pendant une période de vingt minutes, et 0 sinon.

**a)** Donner la loi de $U$.

La variable aléatoire $U$ prend les valeurs 0 et 1. Elle suit donc une loi de Bernoulli. Si la probabilité de pêcher un poisson pendant une période de vingt minutes vaut $\frac{1}{4}$, alors

$$\boxed{U \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right).}$$

**b)** On note $V$ le nombre de poissons pêchés pendant trois heures. Donner la loi de $V$.

Trois heures correspondent à 9 périodes de vingt minutes. La variable aléatoire $V$ compte le nombre de succès au cours de 9 épreuves de Bernoulli indépendantes, chacune de paramètre $\frac{1}{4}$. Donc

$$\boxed{V \sim \mathcal{B}\left(9, \frac{1}{4}\right).}$$

**c)** Calculer $\mathbb{P}(V = 0)$.

Comme $V \sim \mathcal{B}\left(9, \frac{1}{4}\right)$,

$$\mathbb{P}(V = 0) = \binom{9}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^9.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(V = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^9.}$$

**14.**

**a)** Rappeler la loi de Poisson de paramètre $\lambda$, son espérance et sa variance.

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout entier naturel $k$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

**b)** Déterminer la valeur de $\lambda$ à choisir pour approcher la loi de $V$.

On souhaite approcher la loi binomiale de $V$ par une loi de Poisson ayant la même espérance. Or

$$V \sim \mathcal{B}\left(9, \frac{1}{4}\right),$$

donc

$$\mathbb{E}(V) = 9 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Il faut donc choisir

$$\boxed{\lambda = \frac{9}{4}.}$$

**c)** Calculer alors $\mathbb{P}(X = 0)$.

Avec ce choix, si $X \sim \mathcal{P}\left(\frac{9}{4}\right)$, alors

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^0}{0!} e^{-9/4} = e^{-9/4}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = e^{-9/4}.}$$

**15.** Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes.

**a) Décomposition de l'événement** $[X + Y = 15]$

Pour tout couple de valeurs prises par $X$ et $Y$, la condition $X + Y = 15$ est réalisée si et seulement s'il existe un entier $k \in \{0, \dots, 15\}$ tel que

$$X = k \quad \text{et} \quad Y = 15 - k.$$

On en déduit que l'événement $[X + Y = 15]$ est égal à la réunion des événements $[X = k] \cap [Y = 15 - k]$ lorsque $k$ décrit $\{0, \dots, 15\}$.

Ainsi,

$$[X + Y = 15] = \bigcup_{k=0}^{15} \big([X = k] \cap [Y = 15 - k]\big).$$

**b)** En déduire une expression de $\mathbb{P}(X + Y = 15)$ sous forme de somme.

Par additivité des probabilités sur une union disjointe, puis par indépendance de $X$ et $Y$,

$$\mathbb{P}(X + Y = 15) = \sum_{k=0}^{15} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = 15 - k).$$

Comme $X$ et $Y$ suivent des lois de Poisson,

$$\mathbb{P}(X + Y = 15) = \sum_{k=0}^{15} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{15-k}}{(15-k)!} e^{-\mu}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X + Y = 15) = \sum_{k=0}^{15} \frac{\lambda^k \mu^{15-k}}{k!(15-k)!} e^{-(\lambda+\mu)}.$$

Comme $\dfrac{1}{k!(15-k)!} = \dfrac{1}{15!}\dbinom{15}{k}$, il vient

$$\boxed{\mathbb{P}(X + Y = 15) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{15!} \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \lambda^k \mu^{15-k}.}$$

**c)** Simplifier cette expression.

D'après la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \lambda^k \mu^{15-k} = (\lambda+\mu)^{15}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(X+Y=15) = \frac{(\lambda+\mu)^{15}}{15!} e^{-(\lambda+\mu)}.}$$

**d)** Déterminer, pour tout entier $k \in \{0, \ldots, 15\}$, la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=15).$$

Soit $k \in \{0, \ldots, 15\}$. Par définition de la probabilité conditionnelle,

$$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=15) = \frac{\mathbb{P}(X=k,\ Y=15-k)}{\mathbb{P}(X+Y=15)}.$$

Comme $X$ et $Y$ sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(X=k,\ Y=15-k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{15-k}}{(15-k)!}.$$

En utilisant le résultat de la question 15.c, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=15) &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)} \dfrac{\lambda^k \mu^{15-k}}{k!(15-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \dfrac{(\lambda+\mu)^{15}}{15!}} \\
&= \frac{15!}{k!(15-k)!} \frac{\lambda^k \mu^{15-k}}{(\lambda+\mu)^{15}} \\
&= \binom{15}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{15-k}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=15) = \binom{15}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{15-k}.}$$

**e)** En déduire la loi conditionnelle de $X$ sachant $X+Y=15$.

La formule obtenue à la question précédente est celle d'une loi binomiale de paramètres 15 et

$$p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

$$\boxed{Z \sim \mathcal{B}\left(15, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right).}$$

**f)** Justifier que

$$\mathbb{P}_{[X+Y=15]}([X \geq Y]) = \mathbb{P}_{[X+Y=15]}([X \geq 8]),$$

puis exprimer à l'aide d'une somme la probabilité que le pêcheur ait battu son rival en fonction de $\lambda$ et $\mu$.

On se place sous la condition

$$X+Y=15.$$

Soit $\omega$ un aléa tel que

$$X(\omega)+Y(\omega)=15.$$

Alors

$$Y(\omega) = 15 - X(\omega).$$

Par conséquent,

$$X(\omega) \geq Y(\omega)$$

équivaut à

$$X(\omega) \geq 15 - X(\omega),$$

c'est-à-dire

$$2X(\omega) \geq 15.$$

Comme $X(\omega)$ est un entier naturel, cette relation équivaut à

$$X(\omega) \geq 8.$$

On a donc bien, sous la condition $X + Y = 15$,

$$[X \geq Y] = [X \geq 8].$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_{[X+Y=15]}([X \geq Y]) = \mathbb{P}_{[X+Y=15]}([X \geq 8]).$$

D'après la question 15.e, la loi conditionnelle de $X$ sachant $X + Y = 15$ est la loi binomiale

$$\mathcal{B}\left(15, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right).$$

On en déduit

$$\mathbb{P}_{[X+Y=15]}([X \geq 8]) = \sum_{k=8}^{15} \mathbb{P}_{[X+Y=15]}([X = k]).$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X+Y=15]}([X \geq Y]) = \sum_{k=8}^{15} \binom{15}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{15-k}.}$$