Concours blanc (27/05)

Consignes : Le sujet est composée de trois parties totalement indépendantes. Ces dernières seront traitées sur des copies doubles séparées, lesquelles seront regroupées en trois tas distincts à la fin de l'épreuve. Le non respect de cette consigne entraînera un malus de 5% sur la note. Vous disposerez de 4 heures pour traiter ce sujet. A la fin de l'épreuve, un chronomètre sera lancé. Vous aurez alors une minute pour rendre vos copies. A nouveau, un malus de 5% sur la note sera appliqué pour toute copie rendue en retard. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter l'intégralité du sujet pour obtenir 20.

1 Algèbre linéaire et application aux probabilités

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1) Rappeler la définition de f. Que représente A pour f ?

2) a) Déterminer un réel a tel que : $A^2 - 8A = aI_3$.

2) b) Montrer que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

2) c) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$.

Montrer que si $AX = \lambda X$, alors λ est racine du polynôme $X^2 - 8X + 12$. Quelles sont les racines de ce polynôme ?

3) a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id})$.

3) b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

4) On note $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ puis $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$.

Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, notée P.

6) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$, notée Q.

7) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$, notée D.

8) Quel est le lien entre A, D, P et Q ?

9) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = PD^nQ$.

10) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dernière colonne de A^n vaut : $2^{n-2}\begin{pmatrix} 3^n - 1 \\ 3^n - 1 \\ 2(3^n + 1) \end{pmatrix}$.

11) Application : Lucille aime lire un livre avant de s'endormir. Elle possède trois types de livres : des livres de chevaux, des livres de dinosaures et des livres de princesses. Le choix du livre se fait en fonction du livre qu'elle a lu la veille selon le schéma suivant, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- si elle a lu un livre de chevaux le jour n, alors elle lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{1}{3}$,

• si elle a lu un livre de princesses le jour n, alors elle lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{1}{3}$,

• si elle a lu un livre de dinosaures le jour n, alors elle lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{2}{3}$.

Le premier jour, elle lit un livre de dinosaures.

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$:

• c_n la probabilité de l'événement C_n : « Lire un livre de chevaux le jour n »,

• p_n la probabilité de l'événement P_n : « Lire un livre de princesses le jour n »,

• d_n la probabilité de l'événement D_n : « Lire un livre de dinosaures le jour n »,

• $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

11) a) Que vaut X_1 ?

11) b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (C_n, P_n, D_n), montrer que : $X_{n+1} = \frac{1}{6} A X_n$.

11) c) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1$.

11) d) En utilisant la question 10), montrer que $d_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n$.

2 Analyse : Fonctions et suite définie de manière itérative

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1) a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) b) Etudier la continuité de f en 0.

2) a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis déterminer pour tout réel $x > 0$ l'expression de $f'(x)$.

2) b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2) c) Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \geq 0$ puis donner les variations de f.

3) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de f.

4) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+$.

5) a) Calculer $\displaystyle\lim_{u \to 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u}$.

5) b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$.

5) c) On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Donner l'équation cartésienne réduite de la droite asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n.

6) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

6) b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

6) c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

7) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1})$.

7) b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ est divergente, c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = +\infty$.

3 Analyse : Suites, intégrales et probabilités

On pose $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}.$$

1) Montrer que l'on définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs.

2) Donner la valeur de u_2 et u_3.

3) a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}.$$

3) b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

4) Pour tout entier naturel k non nul, on pose : $v_k = \dfrac{1}{u_k}$.

4) a) Etablir l'égalité : $\forall k \in \mathbb{N}^*, v_{k+1} - v_k = 2(k+1)$.

4) b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique ? Justifier.

4) c) Par sommation de l'égalité obtenue à la question 4)a), établir la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n(n+1)$.

4) d) En déduire explicitement u_n en fonction de n puis retrouver la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) a) Déterminer les constantes a et b pour lesquelles, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}.$$

5) b) Pour tout entier N supérieur ou égal à 1, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$.

5) c) En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$ lorsque N tend vers $+\infty$.

6) On admet que l'on peut définir une variable aléatoire X dont la loi est donnée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = u_n$$

si et seulement si pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 0$ et si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = 1$.

6) a) Montrer que l'on peut définir une variable aléatoire X dont la loi est donnée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = u_n.$$

6) b) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que : $\displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+1}$.

6) c) En déduire l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \ln(N+2) - \ln(2)$.

6) d) Montrer alors que X ne possède pas d'espérance, c'est-à-dire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} nP(X = n) = +\infty.$$