EXERCICE PRINCIPAL T 16

1. Question de cours : Propriétés d'une variable aléatoire à densité.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(t) = \begin{cases} k\,t^{k-1} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.a) Vérifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, la fonction f_k est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on note Y une variable aléatoire de densité f_k.

b) Calculer l'espérance et la variance de Y.

3.a) Déterminer la fonction de répartition F de Y.

b) Calculer le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite de F au point 1.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

4. Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi que la variable aléatoire Y.

On pose pour tout $n \geqslant 1$, $Z_n = \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ et on admet que Z_n est une variable aléatoire.

a) Montrer que pour tout réel z du segment $[0,1]$, on a : $[Z_n \leqslant z] = [Y_1 \leqslant z] \cap [Y_2 \leqslant z] \cap \ldots \cap [Y_n \leqslant z]$.

b) En déduire la fonction de répartition G de Z_n ainsi qu'une densité de Z_n.

c) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

EXERCICE SANS PRÉPARATION T 16

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note A la matrice carrée d'ordre n définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$

et I la matrice unité d'ordre n.

1. Calculer la matrice $A^2 - (n+2)A + (n+1)I$.

2. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A et I.

EXERCICE PRINCIPAL T 18

1. Question de cours : Définition d'une fonction convexe.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, telle que $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^2}$.

2.a) Étudier les variations de la fonction f_1 sur $[0, +\infty[$.

b) Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

c) Établir l'existence d'un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$. Quelles sont ses coordonnées ?

d) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

4.a) Calculer pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+2} + u_n$.

b) Calculer u_3 et u_5.

c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2}\left(\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right).$$

EXERCICE SANS PRÉPARATION T 18

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Donner la loi de Y_n ainsi que l'espérance $E(Y_n)$ et la variance $V(Y_n)$ de Y_n.

2. Montrer que pour tout p vérifiant $0 < p < 1$, on a : $V(Y_n) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

ORAL HEC 2016

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option technologique

EXERCICE PRINCIPAL T 14

La probabilité d'un événement B est notée $P(B)$ et si $P(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle d'un événement A sachant B est notée $P_B(A)$.

1. Question de cours : Le modèle binomial.

Soit n un entier supérieur à 1. Une urne contient 3 boules numérotées 1,2 et 3. On tire successivement n boules avec remise et pour $k = 1, 2, 3$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules portant le numéro k qui ont été tirées.

2.a) Reconnaître les lois de X_1, X_2 et X_3.

b) Rappeler l'espérance et la variance de X_1.

c) Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? Calculer la covariance de X_1 et X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3.a) Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant n$ et soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant n - i$. Établir la relation :

$$P_{[X_1=i]}([X_2 = j]) = \binom{n-i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}.$$

b) En déduire pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $0 \leqslant i + j \leqslant n$, $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$.

4. On prend $n = 3$. Donner la loi conjointe du couple (X_1, X_2). On représentera les résultats dans un tableau.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL T 14

1. Cours

2.a) Pour tout $i = 1, 2, 3$, on a $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$.

b) On a : $E(X_i) = \dfrac{n}{3}$ et $V(X_i) = \dfrac{2n}{9}$.

c) $X_1 + X_2 + X_3 = n$. D'où $V(X_1 + X_2 + X_3) = V(n) = 0$, soit encore (la variance d'une somme de deux variables est au programme ; à eux de voir comment faire avec trois),

$0 = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_3) + 2\,\mathrm{Cov}(X_2, X_3) = 3V(X_1) + 6\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$

D'où, $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -\dfrac{V(X_1)}{2} = -\dfrac{n}{9}$. Cette covariance n'étant pas nulle, X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3.a) La loi conditionnelle de X_2 sachant $[X_1 = i]$ correspond au schéma binomial dans une urne de taille $n - i$ et de probabilité de succès égal à $\dfrac{1}{2}$. D'où : $\forall j \in [\![0, n - i]\!]$, $P_{[X_1=i]}([X_2 = j]) = \dbinom{n-i}{j}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-i}$.

b) On sait que $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = P_{[X_1=i]}([X_2 = j]) \times P([X_1 = i])$. Par suite, on a :

pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $0 \leqslant i + j \leqslant n$, $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \dbinom{n}{i}\dbinom{n-i}{j}\dbinom{n-i-j}{n-i-j}\dfrac{1}{3^n}$,

soit, $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \dfrac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\dfrac{1}{3^n}$ (loi trinomiale).

4. On pose $p_{i,j} = P([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$. On trouve : $p_{0,0} = 1/27$, $p_{0,1} = 1/9$, $p_{0,2} = 1/9$, $p_{0,3} = 1/27$, puis, $p_{1,0} = 1/9$, $p_{1,1} = 2/9$, $p_{1,2} = 1/9$, $p_{1,3} = 0$, puis $p_{2,0} = 1/9$, $p_{2,1} = 1/9$, $p_{2,2} = 0$, $p_{2,3} = 0$, et enfin, $p_{3,0} = 1/27$, $p_{3,1} = p_{3,2} = p_{3,3} = 0$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION T 14

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$, à valeurs réelles, donnée par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

1. Établir, sans calculs d'intégrales, l'encadrement : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION T 14

1. Sur $[0,1]$, on a $f(x) \geqslant 0$. D'autre part, $f'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{4}{(1+x)^3} > 0$, donc la fonction f est convexe sur $[0,1] \Longrightarrow \forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant -x+1 \Longrightarrow 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (-x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

2. Par exemple, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{1+x} - 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$.

EXERCICE PRINCIPAL T 17

1. Question de cours : Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

2. Pour tout réel $a > 0$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que : $f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour quelle valeur de a la fonction f_a est-elle une densité de probabilité ?

Pour cette valeur de a, on note f cette densité. Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire à densité de densité f.

3.a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

b) Tracer la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

c) Résoudre l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$.

4. Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X.

On pose pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que T_n est une variable aléatoire à densité.

On a donc pour tout x réel, l'égalité d'événements suivante : $[T_n \geqslant x] = [X_1 \geqslant x] \cap [X_2 \geqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \geqslant x]$.

On note G la fonction de répartition de T_n et g une densité de T_n.

a) Déterminer pour tout x réel, $G(x)$ et en déduire pour tout x réel, $g(x)$.

b) Soit un réel $A > 1$. Calculer pour tout entier $r \geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^A x^r g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Pour quelles valeurs de r la limite de $\displaystyle\int_1^A x^r g(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque A tend vers $+\infty$, est-elle finie ?

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL T 17

1. Cours.

2. On trouve $a = 2 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3.a) On trouve : $F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b) La fonction F est nulle sur $]-\infty, 1]$ puis est strictement croissante, concave et tend vers 1 à l'infini.

c) $F(x) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = \sqrt{2}$.

4.a) On trouve : $G(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^{2n}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2n}{x^{2n+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b)c) $\displaystyle\int_1^A x^r g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2n}{r-2n}\left(A^{r-2n} - 1\right) \Longrightarrow \lim_{A \to +\infty} \frac{2n}{r-2n}\left(A^{r-2n} - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{2n}{2n-r} & \text{si } r < 2n \\ +\infty & \text{si } r \geqslant 2n \end{cases}$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION T 17

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle que $A^0 = I$ (matrice unité d'ordre 3).

1. Calculer les matrices A^2 et A^3.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, la matrice A^n est de la forme $\begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$ et donner les relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION T 17

1. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$.

2. La proposition est vraie pour $n = 0$ avec $b_0 = 0$ et $a_0 = 1$ ainsi que pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

On suppose la propriété vraie au rang n ; alors : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} b_n & 1/2(a_n + b_n) & 1/2(a_n + b_n) \\ 1/2(a_n + b_n) & b_n & 1/2(a_n + b_n) \\ 1/2(a_n + b_n) & 1/2(a_n + b_n) & b_n \end{pmatrix}$ et la propriété est encore vraie au rang $n + 1$ avec $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = 1/2(a_n + b_n)$.

HEC PARIS

ORAL HEC 2017

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option technologique

SUJET T 05

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : formule de Koenig-Huygens.

2. Soit g la fonction réelle définie par : $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3}$.

   a) Donner l'ensemble de définition de g et préciser la parité de la fonction g.

   b) Calculer la fonction dérivée de g.

   c) Donner une représentation graphique de g, en indiquant ses asymptotes.

   d) Justifier l'égalité :

$$\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{6}\ .$$

3. Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 2, on note f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2nx}{(x^2-3)^{n+1}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases} .$$

   a) Démontrer que f_n est une densité de probabilité.

   b) Soit X_n une variable aléatoire de densité f_n.

   i) Démontrer que la variable aléatoire ${X_n}^2$ admet une espérance, donnée par la formule :

$$E({X_n}^2) = 3 + \frac{n}{n-1}\ .$$

   ii) Trouver la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice sans préparation

1. Calculer les puissances successives de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
2. On considère les instructions *Scilab* suivantes :

```
M=eye(2,2)/2;
N=M;
N(1,2)=1;
M=N;
c=1;
while N(1,1)>0.01
        N=M*N;
        c=c+1;
        end;
```

Quelles sont les valeurs des variables c et N(1,2) après l'exécution des instructions précédentes ?

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours : formule de Koenig-Huygens.

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 .$$

2. Soit g la fonction réelle définie par : $\quad g(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$.

   a) Donner l'ensemble de définition de g et préciser la parité de la fonction g.

La fonction g est impaire et définie sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}$.

   b) Calculer la fonction dérivée de g.

$$\forall x \in D_g, \quad g'(x) = -\frac{(x^2+3)}{(x^2-3)^2} .$$

   c) Donner une représentation graphique de g, en indiquant ses asymptotes.

• La fonction g est décroissante sur chacun des trois intervalles $]-\infty, -\sqrt{3}[$, $]-\sqrt{3}, +\sqrt{3}[$ et $]+\sqrt{3}, +\infty[$.

• Son graphe, symétrique par rapport à l'origine, admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale et les droites verticales d'équation $x = -\sqrt{3}$ et $x = +\sqrt{3}$ pour asymptotes verticales.

   d) Justifier l'égalité :

$$\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{6} .$$

$$\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-3)\right]_2^3 = \frac{1}{2}(\ln 6 - \ln 1) = \ln\sqrt{6} .$$

3. Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 2, on note f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2nx}{(x^2-3)^{n+1}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases} .$$

   a) Démontrer que f_n est une densité de probabilité.

• La fonction f_n est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1 puisque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{2nx}{(x^2-3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{(x^2-3)^n}\right]_2^A = 1 .$$

b) Soit X_n une variable aléatoire de densité f_n.

i) Démontrer que la variable aléatoire ${X_n}^2$ admet une espérance, donnée par la formule :

$$E({X_n}^2) = 3 + \frac{n}{n-1} \cdot$$

$$E({X_n}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{2nx^3}{(x^2-3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{2nx\big(3+(x^2-3)\big)}{(x^2-3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\int_2^{+\infty} \frac{2nx}{(x^2-3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x + \frac{n}{n-1}\int_2^{+\infty} \frac{2(n-1)x}{(x^2-3)^{(n-1)+1}}\,\mathrm{d}x = 3 + \frac{n}{n-1} \cdot$$

ii) Trouver la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

La nullité de f_n sur l'intervalle $]-\infty, 2[$ et la formule de Koenig-Huygens permettent d'obtenir l'encadrement

$$2 \leq E(X_n) \leq \sqrt{E({X_n}^2)} = \sqrt{3 + \frac{n}{n-1}}$$

qui fournit par passage à la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = 2\,.$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Calculer les puissances successives de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & n\,a^{n-1}\,b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

2. On considère les instructions *Scilab* suivantes :

```
M=eye(2,2)/2;
N=M;
N(1,2)=1;
N=M;
c=1;
while N(1,1)>0.01
        N=M*N;
        c=c+1;
        end;
```

   Quelles sont les valeurs des variables c et N(1,2) après l'exécution des instructions précédentes ?

   - $c = 7$
   - $N(1,2) = \dfrac{7}{2^6} = \dfrac{7}{64} = 0.109375$

   puisque le plus petit entier n pour lequel $2^{-n} \leq 0.01$ est 7

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 0.015625 & 0.1875 \\ 0 & 0.015625 \end{pmatrix}$$

   et

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 0.0078125 & 0.109375 \\ 0 & .0078125 \end{pmatrix}$$

SUJET T 06

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.

2. Pour tout nombre réel strictement positif a, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} a\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Pour quelle valeur de a, la fonction f_a est-elle une densité de probabilité ?

On note f cette densité et X une variable aléatoire admettant f pour densité.

3. a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)\,\mathrm{d}x$ et la calculer.

c) Vérifier l'égalité : $\displaystyle E(X) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

4. On pose : $Y = \dfrac{X^2}{9}$.

a) Justifier que Y suit une loi uniforme.

b) Quelle est la loi que permet de simuler l'instruction *Scilab* suivante ?

```
3*sqrt(rand())
```

c) De quel nombre se rapproche la valeur fournie par l'instruction *Scilab* suivante lorsque n est grand ?

```
sum(sqrt(rand(n,1)))/n
```

Exercice sans préparation

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité. On pose : $J = M - I$.

1. Pour tout entier $p \geq 1$, calculer J^p en fonction de J.
2. Donner pour tout entier $n \geq 1$, une expression de M^n en fonction de I et J.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.

2. Pour tout nombre réel strictement positif a, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} a\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Pour quelle valeur de a, la fonction f_a est-elle une densité de probabilité ?

$$\boxed{a = \frac{2}{9}} .$$

On note f cette densité et X une variable aléatoire admettant f pour densité.

3. a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}} .$$

b) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)\,\mathrm{d}x$ et la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \big(1 - \frac{x^2}{9}\big)\,\mathrm{d}x = \boxed{2} .$$

c) Vérifier l'égalité : $\quad E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \boxed{2} .$$

4. On pose : $Y = \dfrac{X^2}{9}$.

a) Justifier que Y suit une loi uniforme.

La fonction de répartition G de Y est donnée par

$$G(x) = P([X^2 \leq 9x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\sqrt{9x}) = x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

ce qui prouve que Y suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

b) Quelle est la loi que permet de simuler l'instruction *Scilab* suivante ?

```
3*sqrt(rand())
```

Si une variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, $3 * \sqrt{U}$ suit la même loi que X, puisque $X = 3\sqrt{Y}$ et que Y et U suivent la même loi.
L'instruction *Scilab* précédente permet donc de simuler la loi de X.

c) De quel nombre se rapproche la valeur fournie par l'instruction *Scilab* suivante lorsque n est grand ?

```
sum(sqrt(rand(n,1)))/n
```

L'instruction *Scilab* "sqrt(rand(n,1))" génère une simulation d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire $X/3$.
Grâce à la loi des grands nombres, on peut donc affirmer que, lorsque n est grand, l'instruction *Scilab* "sum(sqrt(rand(n,1)))/n" fournit une valeur approchée de

$$E(\frac{X}{3}) = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité. On pose : $J = M - I$.

1. Pour tout entier $p \geq 1$, calculer J^p en fonction de J.

$$J^p = 2^{p-1} J$$

2. Donner pour tout entier $n \geq 1$, une expression de M^n en fonction de I et J.

Les matrices I et J commutent.
La formule du binôme donne

$$M^n = (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^k J^{n-k} = I + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-k-1} \right) J = I + 2^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) J$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on obtient finalement

$$M^n = I + 2^{n-1} \left(\frac{3^n}{2^n} - \frac{1}{2^n} \right) J = \boxed{I + \frac{3^n - 1}{2} J}.$$

HEC PARIS

ORAL HEC Paris 2018

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option technologique

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : définition d'une valeur propre d'une matrice.

Soit a et b des réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On pose : $s = 1 - (a + b)$.
Soit A la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. a) Établir l'encadrement : $-1 < s < 1$.
b) Montrer que le polynôme $Q(X) = X^2 - (1+s)X + s$ est un polynôme annulateur de la matrice A.
c) Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de A ?
d) Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés aux deux valeurs propres de A.
e) La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. On rappelle que par convention, on pose $A^0 = I$, où I est la matrice identité d'ordre 2.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n sous forme de tableau.

b) Calculer en fonction de a et b la matrice $L = \lim\limits_{n \to +\infty} A^n$, c'est-à-dire la matrice carrée dont les coefficients sont les limites des coefficients de A^n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On note T une variable aléatoire de densité f.

2. a) Calculer l'espérance de T.

   b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire T.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. $\boxed{\text{Question de cours : définition d'une valeur propre d'une matrice.}}$

On appelle valeur propre d'une matrice carrée A tout nombre réel λ tel qu'il existe une matrice colonne non nulle X vérifiant :
$$AX = \lambda X\ .$$

Soit a et b des réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On pose : $s = 1 - (a + b)$.

Soit A la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. a) $\boxed{\text{Établir l'encadrement : } -1 < s < 1.}$

Comme $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, on a $0 < a + b < 2$ et donc, $-1 < s < 1$.

b) $\boxed{\text{Montrer que le polynôme } Q(X) = X^2 - (1+s)X + s \text{ est un polynôme annulateur de la matrice } A.}$

D'après le cours, si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors le polynôme $X^2 - (a+d)X + ad - bc$ est annulateur de B.

Ici, on a : $a + d = 1 + s$ et $ad - bc = s$, et $Q(X) = X^2 - (1+s)X + s$ est un polynôme annulateur de A.

c) $\boxed{\text{Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de } A\,?}$

On sait que l'ensemble des valeurs propres de A est inclus dans l'ensemble des racines de Q.
La résolution de l'équation $Q(X) = 0$ donne deux solutions 1 et s qui sont donc des valeurs propres possibles.
Au passage, on remarque que ce sont deux racines distinctes car $s < 1$.

Remarque

Comme $A - I = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, 1 est valeur propre de A.

De même, comme $A - sI = \begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, s est valeur propre de A.

d) $\boxed{\text{Montrer que les vecteurs } \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sont des vecteurs propres de } A \text{ associés aux deux valeurs propres de } A.}$

$A\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$, donc le vecteur non nul $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

De même, $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre s.

e) $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est-elle diagonalisable ?}}$

On pose : $P = \begin{pmatrix} b & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$.

On vérifie que $AP = PD$, d'où $D = P^{-1}AP$, et par définition, la matrice A est diagonalisable.

3. a) $\boxed{\text{Exprimer pour tout entier naturel } n, \text{ la matrice } A^n \text{ sous forme de tableau.}}$

On a $A^n = PD^nP^{-1}$.

Les calculs donnent $P^{-1} = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{pmatrix}$ et

$$A^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b + as^n & b(1-s^n) \\ a(1-s^n) & a + bs^n \end{pmatrix} .$$

b) $\boxed{\text{Calculer en fonction de } a \text{ et } b \text{ la matrice } L = \lim_{n \to +\infty} A^n\text{, c'est-à-dire la matrice carrée dont les coefficients sont les limites des coefficients de } A^n \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.}$

Puisque $|s| < 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} s^n = 0$ et $L = \lim\limits_{n \to +\infty} A^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. $\boxed{\text{Montrer que } f \text{ est une densité de probabilité.}}$

   La fonction f est positive, continue sur $\mathbf{R}$ et vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

   car c'est l'espérance d'une loi $\mathcal{E}(1)$.[1]

On note T une variable aléatoire de densité f.

2. a) $\boxed{\text{Calculer l'espérance de } T.}$

$$E(T) = \int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2$$

   car c'est le moment (non centré) d'ordre 2 d'une loi $\mathcal{E}(1)$.

   b) $\boxed{\text{Déterminer la fonction de répartition } F \text{ de la variable aléatoire } T.}$

   Pour $x < 0$, on a $F(x) = 0$ et pour $x \geq 0$, à l'aide d'une intégration par parties :

$$F(x) = \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - (1+x)\mathrm{e}^{-x} \ .$$

1. On peut utiliser avec profit les propriétés de la loi exponentielle de paramètre 1..

Exercice principal

1. Question de cours : définition d'une densité de probabilité.

2. Soit r un réel tel que $r \neq -1$ et soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\ g(x) = -\frac{1}{r+1}(1-x)^{r+1}\ .$$

   a) On note g' la fonction dérivée de g. Pour tout $x \in [0,1[$, calculer $g'(x)$.

   b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

3. On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\ .$$

   b) En déduire la relation $(*)$ suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}\,I_n\ .$$

   c) À l'aide de la relation $(*)$, compléter les lignes (2), (4) et (5) du script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
(1)   n=input ('donner une valeur de n:')
(2)   I= .........
(3)   for k=1 : n
(4)        I= .........
(5)   ......
(6)   disp(I)
```

   d) Calculer I_1.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{4}\,x\sqrt{1-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\ .$$

   a) Montrer que f est une densité de probabilité.

   b) Déterminer la fonction de répartition F d'une variable aléatoire de densité f.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit A la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que le réel λ est valeur propre de A si, et seulement si, il vérifie l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda = 0 .$$

   b) Quelles sont les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) de A ?

2. a) Déterminer les vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement.

   b) Montrer que A est diagonalisable.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. **Question de cours : définition d'une densité de probabilité.**

   Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si elle est positive, continue sauf au plus en un nombre fini de points et si elle vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 .$$

2. Soit r un réel tel que $r \neq -1$ et soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\ g(x) = -\frac{1}{r+1}(1-x)^{r+1} .$$

   a) **On note g' la fonction dérivée de g. Pour tout $x \in [0,1[$, calculer $g'(x)$.**

   On trouve : $g'(x) = (1-x)^r$.

   b) **Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.**

   Avec $r = \dfrac{1}{2}$, on a : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\Big[(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}\cdot$

3. On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

   a) **À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité :**

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x .$$

   On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

   En dérivant $x \longmapsto x^{n+1}$ et en utilisant une primitive de $x \longmapsto (1-x)^{\frac{1}{2}}$, une intégration par parties donne : $I_{n+1} = \Big[-\dfrac{2}{3}x^{n+1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 + \dfrac{2(n+1)}{3}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$, soit encore :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x .$$

   b) **En déduire la relation (∗) suivante :**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}\,I_n .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant les égalités $x^n(1-x)^{\frac{3}{2}} = x^n(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x) = x^n(1-x)^{\frac{1}{2}} - x^{n+1}(1-x)^{\frac{1}{2}}$, on parvient à

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}(I_n - I_{n+1})$$

puis :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}\, I_n\,.$$

c) À l'aide de la relation $(*)$, compléter les lignes (2), (4) et (5) du script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
(1)  n=input ('donner une valeur de n:')
(2)  I= .........
(3)  for k=1 : n
(4)      I= .........
(5)  ......
(6)  disp(I)
```

En complétant les lignes (2), (4) et (5), on obtient :

```
(1)  n=input ('donner une valeur de n:')
(2)  I=2/3
(3)  for k=1 : n
(4)      I=(2*(k+1)/(2*k+5))*I
(5)  end
(6)  disp(I)
```

d) Calculer I_1.

Pour $n = 0$ et $I_0 = \frac{2}{3}$, la relation $(*)$ donne : $I_1 = \frac{4}{15}$.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{15}{4}\, x\sqrt{1-x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Montrer que f est une densité de probabilité.

La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs positives et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{15}{4}\, I_1 = 1$.

b) Déterminer la fonction de répartition F d'une variable aléaléatoire de densité f.

On trouve : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{3}{2}x\right)(1-x)^{\frac{3}{2}} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit A la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que le réel λ est valeur propre de A si, et seulement si, il vérifie l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda = 0 .$$

Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ est non inversible (cours), ce qui donne $\lambda^2 - \lambda = 0$ (on utilise, par exemple, la nullité du déterminant d'ordre 2).

b) Quelles sont les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) de A ?

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} .$$

2. a) Déterminer les vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement.

• Les vecteurs propres de A associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ sont les vecteurs $U = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$.

• Les vecteurs propres de A associés à la valeur propre $\lambda_2 = 0$ sont les vecteurs $V = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $\beta \neq 0$.

b) Montrer que A est diagonalisable.

On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} .$$

Comme P est inversible, $P^{-1}AP = D$ et la matrice A est donc diagonalisable.

HEC PARIS

ORAL HEC Paris 2019

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option technologique

Concours HEC 2019

Sujet T 2

Exercice principal

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout entier n non nul :

$$P([X > n]) \neq 0$$

On dit que X vérifie la propriété d'absence de mémoire lorsque :

$$\forall n \geq 1,\ \forall m \geq 1, \quad P_{[X>n]}([X > n+m]) = P([X > m])$$

1 a) Question de cours : définition d'une suite géométrique.

b) Quelles sont les suites géométriques admettant une limite finie ?

2. Soit T une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Établir que T vérifie la propriété d'absence de mémoire.

3. Soit S une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété d'absence de mémoire.
On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = P([S > n])$.

a) Établir que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall m \geq 1, \quad u_{n+m} = u_n u_m \, .$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique.

c) Exprimer $P([S = n])$ en fonction de certains termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

d) En déduire que la variable aléatoire S suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

4. Quel résultat a-t-on ainsi démontré ?

Exercice sans préparation

Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ admettant :

- $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur colonne propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$

et

- $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur colonne propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 4$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout entier n non nul : $P([X > n]) \neq 0$.
On dit que X vérifie la propriété d'absence de mémoire lorsque :

$$\forall n \geq 1\ \forall m \geq 1 : \quad P_{[X>n]}([X > n+m]) = P([X > m])$$

1 a) Question de cours.

b) Les suites géométriques convergentes sont celles dont la raison appartient à l'intervalle $]-1, +1]$.

2. La variable aléatoire T étant géométrique, on a : $P([T > n]) = (1-p)^n$.

Or :

$$P_{[T>n]}([T > n+m]) = \frac{P([T > n+m] \cap [T > n])}{P([T > n])} = \frac{P([T > n+m])}{P([T > n])} = \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^n} = (1-p)^m = P([T > m]) .$$

Bilan : si T suit une loi géométrique alors T vérifie la propriété d'absence de mémoire.

3 a)

$$P_{[S>n]}([S > n+m]) = \frac{P([S > n+m] \cap [S > n])}{P([S > n])} = \frac{P([S > n+m])}{P([S > n])} = \frac{u_{n+m}}{u_n} = u_m .$$

En résulte l'égalité vraie pour tout couple d'entiers non nuls (n, m) : $u_{n+m} = u_n u_m$.

b) L'égalité précédente étant vraie pour tout couple d'entiers non nuls (n, m) on obtient, pour $m = 1$: $u_{n+1} = u_1 u_n$.
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de raison u_1.

c) S étant à valeurs entières on a, pour tout entier n non nul :

$$P([S = n]) = P([S > n-1]) - P([S > n]) = u_{n-1} - u_n .$$

d) On a ainsi :

$$P([S = n]) = u_1^{n-1} - u_1^n = u_1^{n-1}(1 - u_1) .$$

La variable aléatoire S suit donc la loi géométrique de paramètre $p = 1 - u_1$.

4. Les variables aléatoires à valeurs entières et qui vérifient la propriété d'absence de mémoire sont les variables aléatoires qui suivent une loi géométrique.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ alors la matrice $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ convient.

Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (T)

Juin-juillet 2021

Le bilan de la session 2021 de mathématiques voie T est satisfaisant

Le niveau des candidats est très hétérogène : les notes se sont étalées entre 4 et 19. La moyenne s'établit à 10,74 et l'écart-type à 4,59.

On peut noter chez la plupart des candidats des lacunes en calculs. Mais fort heureusement, nombre d'entre eux les ont compensées par des raisonnements astucieux, un exposé clair et rigoureux et ont été récompensés par de bonnes, voire d'excellentes notes.

Le jury aimerait insister sur les points suivants auprès des futur.e.s candidat.e.s et de leurs enseignant.e.s.

- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes sont des compétences que nous souhaiterions fortement valoriser à l'avenir. Nous insistons sur le fait qu'après avoir tracé un tableau de variation, les candidats doivent être capable d'esquisser l'allure d'une courbe.
- Nous avons noté pas mal de lacunes en calcul, en particulier sur les calculs avec des puissances ou sur le calcul de dérivées.
- les théorèmes du cours doivent être connus précisément, avec leurs hypothèses précises et leurs conclusions.
- Nous avons aussi noté chez certains candidats quelques difficultés avec la formule des probabilités totales.
- Les questions informatiques ne doivent pas être négligées par les candidats. Elles ont permis à certains candidats d'améliorer significativement leur note.
- Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation : au cours de la présentation de l'exercice préparé, le jury pose des questions pour aiguiller le candidat vers la solution. Il convient d'y être attentif. Il est souvent utile d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Par ailleurs, une prestation peut être jugée excellente sans que le candidats ne traite beaucoup de questions, alors qu'un candidat traitant de manière approximative un grand nombre de questions en déformant au passage les théorèmes de son cours risque d'être déçu par sa note finale.
- La question sans préparation est aussi très importante. Là encore, pour la plupart d'entre elles, le candidat peut tout à fait faire bonne impression sans aller au bout de la question. L'important est de réfléchir et d'écouter les indications du jury. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, qui avaient complètement raté l'exercice préparé ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation, et parfois dans les toutes dernières minutes.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T1

Exercice principal T1

Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue une succession de tirages avec remise de cette urne, jusqu'à ce que l'on ait obtenu au moins une fois une boule blanche et une boule noire. On note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche. On note T la variable aléatoire désignant le nombre de tirages effectués. (On rappelle que les tirages s'arrêtent dès que l'on a obtenu une boule blanche et une boule noire) On notera aussi, pour $j \in \mathbb{N}^*$, N_j l'événement "le j-ième tirage donne une boule noire."

1. **Question de cours** : Loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$: protocole, loi, espérance et variance.
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3. (a) Déterminer $T(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([T=2])$.
   (b) Á l'aide du système complet $[N_1, \bar{N_1}]$ calculer $\mathbb{P}([T=k])$ pour $k \in T(\Omega)$.
4. La variable e^X admet-elle une espérance ?
   On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches au moment où l'on s'arrête.
   Par exemple, si les tirages ont donné successivement : une boule noire, une boule noire,une boule noire et une boule blanche, alors $T=4$ et $U=1$.
5. (a) Déterminer $U(\Omega)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}([U=1])$. Les variables U et T sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. Protocole ("premier succès" d'expériences identiques et indépendantes), $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X=k]] = (1-p)^{k-1}p$, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$ (programme ECT2 page 5.)
2. Les tirages sont identiques et indépendants. (avec remise)
   $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right),\ \mathbb{E}(X)=3,\ V(X)=6.}$
3. (a) Il faut au minimum deux tirages pour avoir une boule blanche et une boule noire.
   $T(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{1\}$
   $[T=2] = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$
   Ces événements sont incompatibles : $\mathbb{P}([T=2]) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$
   Par indépendance : $\mathbb{P}([T=2]) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(N_2) + \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \boxed{= \dfrac{4}{9}.}$
   (b) Avec la formule des probabilités totales, pour $k \geqslant 2$:
   $\mathbb{P}([T=k]) = \mathbb{P}([T=k] \cap N_1) + \mathbb{P}([T=k] \cap B_1)$
   Si $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}([T=k] \cap N_1) = \mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k)$ et par indépendance : $\mathbb{P}([T=k] \cap N_1) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{3}$
   On fait la même chose pour $\mathbb{P}([T=k] \cap B_1)$.
   $$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.}$$
4. On utilise le théorème du transfert.
   Si cette série converge absolument, $\mathbb{E}(e^X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])e^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times e^k$

La somme partielle donne pour $N \geqslant 0$, $S_N = \dfrac{1}{3} \times e \times \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(\dfrac{2e}{3}\right)^k$

Or, $\dfrac{2e}{3} > 1$ donc la série diverge

Ainsi $\boxed{e^X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

5. (a) On s'arrête lorsque après au moins une boule blanche.
   $U(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $[U = k]$ est possible.

$$\boxed{U(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

   (b) Avec la formule des probabilités totales et le système complet $[N_1, B_1]$:
   $\mathbb{P}([U = 1]] = \mathbb{P}([U = 1] \cap N_1) + \mathbb{P}([U = 1] \cap B_1)$
   $\mathbb{P}([U = 1] \cap B_1) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \dfrac{2}{9}$
   $\mathbb{P}([U = 1] \cap N_1) = \mathbb{P}(N_1)$ (si l'on a N_1, nécessairement $U = 1$)
   Ainsi $\boxed{\mathbb{P}([U = 1]) = \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{9}}$
   * Le plus simple est de voir que si $T = 2$, nécessairement, $U = 1$, donc :
   $\mathbb{P}([U = 1]|[T = 2]) = 1 \neq \mathbb{P}([U = 1])$
   $\boxed{\text{Les variables ne sont donc pas indépendantes.}}$

Exercice sans préparation T1

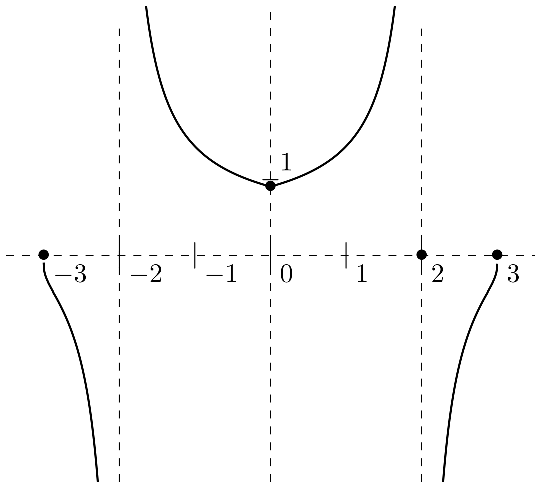
Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(3-|x|)}$

Solution :

1. On commence par le domaine de définition. Il y a deux conditions : $3-|x|>0$ et $\ln(3-|x|)\neq 0$
   ssi $|x|<3$ et $3-|x|\neq 1$ ssi $|x|\in[0;3[\setminus\{2\}$
   $\boxed{D_f=]-3;-2[\cup]-2;2[\cup]2;3[}$
2. On peut noter que $\boxed{f \text{ est paire.}}$
3. Si $x>0$ $|x|=x$
   Donc pour $x\in]0;2[\cup]2;3[$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln(3-x)}$. et $f'(x)=\dfrac{-1}{3-x}\times\dfrac{-1}{\ln^2(3-x)}=\dfrac{1}{(3-x)\ln^2(3-x)}>0$
4. On trace alors le tableau de variation que l'on complète avec les limites (pas de forme indéterminée) et qui permet de tracer la courbe

x	-3			-2			0			2			3
$f(x)$	$\|\|$	0		$\|\|$	$+\infty$				$+\infty$	$\|\|$		0	$\|\|$
	$\|\|$		$\searrow$	$\|\|$		$\searrow$		$\nearrow$		$\|\|$	$\nearrow$		$\|\|$
	$\|\|$		$-\infty$	$\|\|$			$\dfrac{1}{\ln(3)}$			$\|\|$	$-\infty$		$\|\|$

Note : le prolongement par continuité n'est pas au programme



5. Question supplémentaire soit $n\in\mathbb{N}$, déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x)=n$.
   On énonce le théorème de la bijection
   L'équation admet deux solutions si $y\in\mathbb{R}_-^*\cup]\dfrac{1}{\ln(3)};+\infty[$ et une seule si $y=\dfrac{1}{\ln(3)}$
   Sauf qu'on nous précise qu'ici, n est un entier naturel.
   Comme $3>e$, $\ln(3)>\ln(e)=1$ et donc $\dfrac{1}{\ln(3)}\in]0;1[$
   $\boxed{\text{Si } n\in\mathbb{N}^*, \text{ l'équation } f(x)=n \text{ admet deux solutions, l'équation } f(x)=0 \text{ n'admet pas de solution}}$

SUJET T2

Exercice principal T2

1. **Question de cours** : fonction continue en un point.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} x(\ln(x))^n & \text{si } x \in [1;2] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

   On donne l'approximation numérique suivante $\ln(2) \approx 0.7$.
2. Tracer l'allure de la courbe de f_1. Est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$?
3. On note maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^2 x.(\ln(x))^n \, \mathrm{d}x$.
   (a) Calculer I_0.
   (b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - \dfrac{n+1}{2} I_n$.
   (b) Compléter le programme SCILAB de manière à afficher un entier N tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N$, alors $I_n \leqslant \dfrac{1}{1000}$

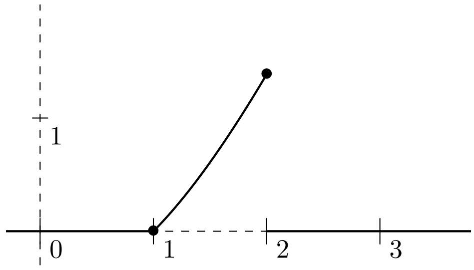
```
 n=0;
 I=
 P=
WHILE (I>0.001)
    P=P*log(2);
    I=

   end;
 disp( );
```

5. Montrer qu'il existe un réel $C_n \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $C_n f_n$ soit une densité de probabilité.

Solution :

1. f est continue en un point a de son domaine de définition ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. (programme ECT1 page 7.)
2. On note que f_1 est dérivable sur $]1;2[$.
   $\forall x \in]1;2[$, $f_1'(x) = 1 + \ln(x) > 1$. $f_1''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$
   La fonction est convexe et croissante sur $[1;2]$,
   $f_1(1) = 0$, $f_1'(1) = 1$, $f_1(2) = 2\ln(2) \approx 1,4$, $f''(2) = 1 + \ln(2) \approx 1,7$
   On peut placer les demi-tangentes
   f est continue en tout point de $\mathbb{R}$ sauf en 2.



3. (a) $I_0 = \int_1^2 x \,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2} \right]_1^2 \boxed{= \dfrac{3}{2}}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   $\forall x \in [1;2]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$, donc $(\ln(x))^{n+1} \leqslant (\ln(x))^n$
   donc $x(\ln(x))^{n+1} \leqslant x(\ln(x))^n$ et par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} \leqslant I_n$ $\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$

   (c) $\forall x \in [1;2]$, $0 \leqslant x(\ln(x))^n \leqslant x(\ln(2))^n$
   Par positivité de l'intégrale : $0 \leqslant I_n \leqslant (\ln(2))^n \displaystyle\int_1^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{3(\ln(2))^n}{2}$
   Comme $|\ln(2)| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln(2))^n = 0$ et donc par encadrement :
   $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

4. (a) On va faire une intégration par partie :
   $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^2 x(\ln(x))^{n+1} \,\mathrm{d}x.$
   On pose $u'(x) = x$, $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $v(x) = (\ln(x))^{n+1}$, $v'(x) = \dfrac{(n+1)}{x}(\ln(x))^n$
   Ainsi $I_{n+1} = \left[\dfrac{x^2.(\ln(x))^{n+1}}{2} \right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2(n+1)(\ln(x))^n}{2x} \,\mathrm{d}x$
   Donc $\boxed{I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - \dfrac{n+1}{2} I_n}$

   (b) Comme la suite (I_n) est décroissante, il suffit de trouver N tel que $I_N \leqslant \dfrac{1}{1000}$.

```
 n=0;
 I=1.5;
 P=1;
WHILE (I>0.001)
    P=P*log(2);
    I=2*P-(n+1)*I/2;
    n=n+1;
   end;
 disp(n)
```

5. La fonction $C_n f_n$ est bien continue sauf en 2 (et admet des limites finies à gauche et à droite en ce point)
   Elle est bien positive si l'on choisit $C_n \geqslant 0$.
   De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} C_n f_n(x) \,\mathrm{d}x = C_n \int_1^2 x(\ln(x))^n \,\mathrm{d}x = C_n I_n.$
   Comme l'intégrale est strictement positive, on pose alors $C_n = \dfrac{1}{I_n}$, et l'on a bien
   $\boxed{C_n f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$

Exercice sans préparation T2

Soient p un réel de $]0;1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([Y = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

On considère la matrice définie aléatoirement par $\forall \omega \in \Omega, \quad M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) - 3 \\ X(\omega) & 3X(\omega) - 2 \end{pmatrix}$.

Autrement dit $M = \begin{pmatrix} X & Y - 3 \\ X & 3X - 2 \end{pmatrix}$.

Calculer la probabilité que cette matrice soit inversible.

Solution :

1. La matrice est non inversible ssi $X(3X-2) - X(Y-3) = 0$ ssi $X(3X - Y + 1) = 0$ ssi $X = 0$ ou $Y = 3X+1$.
   Or, $\mathbb{P}([X = 0] \cup [Y = 3X + 1]) = \mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([Y = 3X + 1]) - \mathbb{P}([Y = 3X + 1] \cap [X = 0])$

   $\mathbb{P}([X = 0] \cup [Y = 3X + 1]) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 3k + 1]) - \mathbb{P}([Y = 3] \cap [X = 0])$.

   $\mathbb{P}([X = 0] \cup [Y = 3X + 1]) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 3k + 1])$.

   Or $\mathbb{P}([X = k] \cup [Y = 3k + 1]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2} = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{k}$ et $\frac{1}{16} \in]0;1[$, la série converge.

   Dans le programme officiel, ils n'ont pas la formule $\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k$

   $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 3k + 1]) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{16}} - 1\right) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{16}{15} - 1\right) = \frac{1}{8 \times 15} = \frac{1}{120}$

   Finalement $\boxed{\mathbb{P}([\text{M est inversible}]) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{120} = \frac{59}{120}}$

2. Question supplémentaire : On suppose que $X = 1$ et $Y = 3$. Calculer alors M^n.

   $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Par récurrence ou binôme de Newton, $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}}$

SUJET T3

Exercice principal T3

Soients $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi exponentielle de paramètre λ, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

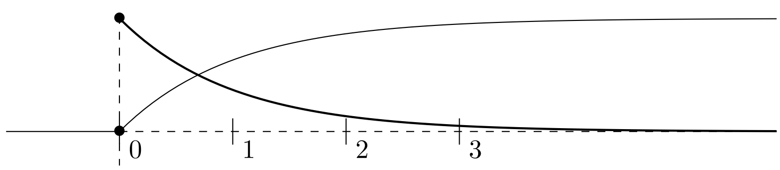
1. **Question de cours** : loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
2. On suppose, dans cette question seulement que $\lambda = 1$. Tracer sur un même graphe une densité et la fonction de répartition de X_1.
   On note $Y = \exp(X_1)$
3. Sur quel intervalle Y prend-elle ses valeurs ? Déterminer la fonction de répartition de Y.
4. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \dfrac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$.
   (a) Déterminer $\mathbb{E}(M_n)$.
   (b) Montrer que $V(M_n) = \dfrac{1}{n\lambda^2}$.
   (c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchébytchev, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $a > 0$:
   $$\mathbb{P}\left(\left[-a < M_n - \frac{1}{\lambda} < a\right]\right) \geqslant 1 - \frac{1}{n(a\lambda)^2}.$$
5. Soit $\alpha \in]0;1[$.
   (a) Choisir $a > 0$ tel que $\forall \lambda \geqslant 1$, $1 - \dfrac{1}{n(a\lambda)^2} \geqslant 1 - \dfrac{1}{na^2} \geqslant 1 - \alpha$.

   On admet que l'on sait que $\lambda \geqslant 1$.

   (b) Déduire de 4.c et de 5.a que l'intervalle $\left]M_n - \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}; M_n + \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}\right[$ est un intervalle de confiance pour $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de risque α.

Solution :

1. Une variable X suit une loi exponentielle de paramètre λ ssi sa fonction de répartition vérifie $F(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ si $x > 0$
   Densité, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ (programme ECT2 page 9.)
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \exp(-x)$ et $F(x) = 1 - \exp(-x)$



   $F(0) = 1$, $F'_d(0) = f(0) = 1$, $f'_d(0) = -1$, on peut placer les tangentes.
3. Comme X_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\boxed{\text{Y prend ses valeurs dans } [1;+\infty[}$
   la notation $X(\Omega)$ n'est pas dans le programme officiel
   Si $x \leqslant 1$, $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = 0$, car l'événement $[Y \leqslant x]$ est impossible.
   Si $x > 1$, $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\exp(X_1) \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant \ln(x))$ (la fonction ln est strictement croissante)
   Ainsi $\boxed{F_Y(x) = F_X(\ln(x)) = 1 - \exp(-\lambda\ln(x)) = 1 - \dfrac{1}{x^\lambda}}$

4. (a) Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n\mathbb{E}(X_k) \boxed{= \dfrac{1}{\lambda}}$

   (b) $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}V(\sum_{k=1}^{n} X_k)$

   Comme les variables sont indépendantes :

   $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{n}{n^2\lambda^2} \boxed{= \dfrac{1}{n\lambda^2}}$

   (c) On applique l'inégalité à la variable M_n, qui admet une espérance et une variance, et à $a > 0$

   $\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{a^2}$

   On a $\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(M_n) = \dfrac{1}{n\lambda^2}$

   On passe à l'événement contraire : $\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < a) \leqslant 1 - \dfrac{V(M_n)}{a^2}$

   Or, $|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < a$ ssi $-a < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < a$. On retrouve bien $\boxed{\mathbb{P}\left(-a < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < a\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{n\lambda^2 a^2}}$

5. (a) Pour $\lambda \geqslant 1$, on a déjà la première inégalité car $n(a\lambda)^2 \geqslant na^2$ donc $\dfrac{1}{n(a\lambda)^2} \leqslant \dfrac{1}{na^2}$ et $1 - \dfrac{1}{n(\lambda a)^2} \geqslant 1 - \dfrac{1}{na^2}$

   Pour la deuxième inégalité $\dfrac{1}{na^2} \geqslant 1 - \alpha$ ssi $na^2\alpha \geqslant 1$ ssi $a \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}$

   Il suffit de prendre $\boxed{a = \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}}$

   (b) En utilisant 4.c et 5.a avec $a = \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}$

   $\mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}\right]\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{n\lambda^2 a^2} \geqslant 1 - \alpha$

   Il suffit de traduire l'événement $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}\right]$ en $[M_n \in I]$ avec I un intervalle.

   $-\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}$ ssi $-\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} - M_n < -\dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} - M_n$

   ssi $\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} + M_n > \dfrac{1}{\lambda} > -\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} + M_n$ ssi $\dfrac{1}{\lambda} \in \left]M_n - \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}; M_n + \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}\right[$.

   $\boxed{\left]M_n - \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}; M_n + \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}\right[\text{ est un intervalle de confiance pour } \dfrac{1}{\lambda} \text{ au niveau de risque } \alpha.}$

Exercice sans préparation T3

Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On définit une suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{q^n}{n!}$
Donner la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et prouvez le résultat proposé.

Solution :

* Une réponse utilisant la convergence de la série exponentielle est bien sûr possible.
* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{q}{n+1}$, donc $(u_n > 0)$ la suite est décroissante à partir du rang $N = \lfloor q \rfloor$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Et si elle converge vers $\ell \neq 0$,par unicité de la limite $\dfrac{\ell}{\ell} = 0$

C'est absurde

Question supplémentaire : faire la preuve avec une autre méthode.

* On peut aussi remarquer que pour $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{q}{N+1}\right) u_n$

Par récurrence immédiate, $u_n \leqslant u_N \left(\dfrac{q}{N+1}\right)^{n-N}$ et comme $\dfrac{q}{N+1} \in]0;1[$, on peut conclure par encadrement.

Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (T)

Juin-juillet 2022

Le bilan de la session 2022 de mathématiques voie T est satisfaisant

Cette année les notes se sont étalées entre 6 et 19. La moyenne s'établit à 11,33 et l'écart-type à 3,66.

Le niveau d'ensemble des candidats nous a semblé un peu plus homogène que l'année dernière : il n'y a pas eu de prestations catastrophiques, mais aussi un peu moins de prestations brillantes.

Le jury insiste à nouveau sur sur les points suivants auprès des futur.e.s candidat.e.s et de leurs enseignant.e.s.

— Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Le candidat doit vraiment s'attendre à se voir demandé une esquisse qualitative après un tableau de variation.

— Malgré quelques progrès, il faut rester vigilant sur les calculs.

— Les théorèmes du cours doivent être connus précisément, avec leurs hypothèses précises et leurs conclusions.

— Il n'y avait pas cette année de question d'informatique dans les exercices proposés : il est fort probable que l'an prochain elles fassent leur retour l'an prochain.

— Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation : au cours de la présentation de l'exercice préparé, le jury pose des questions pour aiguiller le candidat vers la solution. Il convient d'y être attentif. Il est souvent utile d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Par ailleurs, une prestation peut être jugée excellente sans que le candidats ne traite beaucoup de questions, alors qu'un candidat traitant de manière approximative un grand nombre de questions en déformant au passage les théorèmes de son cours risque d'être déçu par sa note finale.

— La question sans préparation est aussi très importante. Là encore, pour la plupart d'entre elles, le candidat peut tout à fait faire bonne impression sans aller au bout de la question. L'important est de réfléchir et d'écouter les indications du jury. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, qui avaient complètement raté l'exercice préparé ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation, et parfois dans les toutes dernières minutes.

Voici les sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T1

Exercice principal T1

Soient k et n deux entiers naturels supérieur ou égal à 2 fixé.
Une urne contient 3 jetons numérotés de 1 à 3 et l'on effectue n tirages avec remise.
Pour $j \in [|1;3|]$, on note N_j le nombre de jetons numéroté(s) j tiré(s).
Ainsi, N_1 représente le nombre de jeton n°1 tiré(s) en n tirages.

1. **Question de cours** : loi binomiale : protocole, loi, espérance, variance.
2. (a) Déterminer la loi de N_1.
   (b) Montrer que $N_1 + N_2$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Donner sa variance et son espérance.
   (c) Déterminer la covariance de N_1 et de N_2 ainsi que leur coefficient de corrélation linéaire.
3. On note maintenant, pour $j \in [|1, k|]$, X_j la variable de Bernoulli qui vaut 1 si au moins un jeton numéroté j est tiré.
   (a) Déterminer la loi commune à X_1 et à X_2.
   (b) Calculer la covariance de X_1 et de X_2.
4. On note $Z = \sum_{j=1}^{3} X_j$.
   (a) Que représente la variable Z ?
   (b) Donner la loi de Z quand $n = 3$.

Solution :

1. Protocole ("nombre de succès" pour n expériences identiques et indépendantes), $X(\Omega) = [|0;n|]$ et pour $k \in [|0;n|]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. (Programme ECT1 page 12)
2. (a) Les tirages sont identiques et indépendants (avec remise)
   $\boxed{N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)}$
   (b) $N_1 + N_2$ désigne le nombre de fois où l'on a obtenu la boule n°1 ou la boule n°2 : on effectue toujours n expériences, mais on change la définition du succès
   $\boxed{N_1 + N_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right), \mathbb{E}(N_1 + N_2) = \frac{2n}{3}, V(N_1 + N_2) = \frac{2n}{9}}$
   (c) On utilise la formule $V(N_1 + N_2) = V(N_1) + V(N_2) + 2cov(N_1, N_2)$
   Ainsi comme $V(N_1) = V(N_2) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}$, on obtient $cov(N_1, N_2) = \frac{-n}{9}$
   $\rho(X_1, X_2) = \frac{-cov(N_1, N_2)}{\sigma(N_1)\sigma(N_2)} = \frac{-n/9}{2n/9} = \frac{-1}{2}$
3. (a) $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}(N_1 = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
   $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$

(b) Il faut calculer $\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$
Mais X_1X_2 est aussi une variable de Bernoulli.
$\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \mathbb{P}(N_1 + N_2 \neq 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$
Donc $\boxed{cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1X_2)(\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)) = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2}$

4. (a) Z représente le nombre de fois où la variable X_j vaut 1 :
$\boxed{\text{c'est le nombre de jetons différents qui vont sortir au cours des } n \text{ tirages.}}$

(b) On n'a pas une binomiale car les variables X_j ne sont pas identiques et indépendantes.
$Z(\Omega) = \{1; 2; 3\}$

i. $[Z = 1]$ ssi les 3 tirages donnent le même jeton.
$[Z = 1] = [N_1 = 3] \cup [N_2 = 3] \cup [N_3 = 3]$. 3 événements incompatibles, on somme les probabilités.
$\mathbb{P}([Z = 1]) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \boxed{= \frac{1}{9}}$

ii. $[Z = 3]$ ssi les trois tirages donnent des jetons différents.
On peut proposer $[Z = 3] = A_2 \cap A_3$ avec A_i " le i-me tirage donne un jeton qui n'a jamais été tiré."
Ainsi $\mathbb{P}([Z = 3]) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(A_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \boxed{= \frac{2}{9}}$

iii. $\mathbb{P}([Z = 2]) = 1 - \mathbb{P}([Z = 1]) - \mathbb{P}([Z = 3]) \boxed{= \frac{2}{3}}$

Exercice sans préparation T1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{sinon} \end{cases}$

1. Sur quel(s) intervalle(s) f est-elle continue ?
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans un ensemble à déterminer.

Solution :

1. Par opérations usuelles, f est continue sur $\mathbb{R}_-$, $]0;1[$ et $]1,+\infty[$
   Mais comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, f est aussi continue en 0, donc sur $]-\infty;1[$
   $\boxed{f \text{ est continue sur }]-\infty;1[\text{ et sur }]1,+\infty[}$
2. $\forall x \in]-\infty;0[$, $f'(x) = \dfrac{2x(1+x^2)-2x.x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$
   $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x.(x^2-1)-2x.x^2}{(1-x^2)^2} = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0.$
   D'où le tableau de variation

x	$-\infty$			1			$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	1

   Note on a $f(0) = 0$, et f n'est pas dérivable en 0, mais la continuité en 0 suffit pour montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$
   Pour les limites : ils ne connaissent pas la notion d'équivalent, mais on un "truc" sur les fractions de polynômes
   Avec le théorème de la bijection monotone f réalise deux bijections respectivement de $]-\infty;1[$ dans lui même et de $]1;+\infty[$ dans lui même
   Comme les deux intervalles d'arrivées ne se recoupent pas, on a bien $\boxed{\text{une bijection de } \mathbb{R}\setminus\{1\} \text{ dans } \mathbb{R}\setminus\{1\}.}$
   En effet chaque élément de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ est bien atteint une et une seule fois.
3. Question supplémentaire : chercher l'expression explicite de la bijection réciproque de f
   Donc, d'après le tableau, $f^{-1}(y) > 0$ si $y < 0$ ou $y > 1$
   On résout alors l'équation $f(x) = y$, mais quelle expression de $f(x)$ utiliser ? Cela dépend de la valeur de y.
   On voit que $x > 0$ ssi $f(x) < 0$ ou $f(x) > 1$
   Pour $y < 0$ ou $y > 1$ on résout donc $\dfrac{x^2}{x^2-1} = y$ ssi $x^2 = \dfrac{y}{y-1}$
   Pour $y < 0$ ou $y > 1$, $\dfrac{y}{y-1} > 0$ et donc, comme on cherche $x > 0$
   $\boxed{\text{Pour } y \in \mathbb{R}_-^* \cup]1;+\infty[,\ f^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{y}{y-1}}}$
   De même $x \leqslant 0$ ssi $f(x) \in]0;1[$
   On résout $\dfrac{x^2}{x^2+1} = y$ ssi $x^2 = \dfrac{y}{1-y}$
   On a bien $\dfrac{y}{1-y} \geqslant 0$ et on cherche $x \leqslant 0$
   $\boxed{\text{Pour } y \in [0;1[,\ f^{-1}(y) = -\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}}$

SUJET T2

Exercice principal T2

1. **Question de cours** : définition des valeurs propres d'une matrice.

   Soit a un réel non nul.

   On pose alors $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et B$= \begin{pmatrix} 3 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 3 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 3 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M.

3. (a) Exprimer M^2 en fonction de M.
   (b) Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de M ?
   (c) Montrer que M n'est pas inversible.

4. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = 3^{k-1}M$.
   (b) Exprimer B^p en fonction de p, I et M pour $p \in \mathbb{N}$.

5. Trouver deux vecteurs non proportionnels de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solutions de l'équation $x + ay + a^2z = 0$. Que peut-on dire de ces vecteurs ?

Solution :

Bien lire le programme officiel, qui proscrit la résolution de système, ne donne pas le théorème de diagonalisation, mais incite à utiliser les polynômes annulateurs

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ ssi il existe une matrice colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle tel que $MX = \lambda X$. (programme ECT2 page 7.)

2. $M \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur est non nul.

   $\boxed{\text{C'est un vecteur propre de M}}$

3. (a) $\boxed{M^2 = 3M}$
   (b) Si λ est une valeur propre, alors $\lambda^2 = 3\lambda$: les seules valeurs propres possibles sont 0 et 3.
   (c) Comme $M^2 = 3M$, si M était inversible on multiplierait par M^{-1} et l'on aurait $M = 3I$, ce qui n'est pas le cas.

   $\boxed{\text{M n'est pas inversible}}$

4. (a) Par récurrence.
   Au rang 1, $M^1 = 3^0M$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Si on suppose la propriété vraie au rang n, $M^{n+1} = M^n.M = 3^{n-1}M^2 = 3^n.M$. C'est la propriété au rang $n+1$.
   La propriété est héréditaire
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M^n = 3^{n-1}M.}$

(b) On a $B=M+2I$, or $M(2I)=2M=M(2I)$, on peut utiliser le binôme de newton.

Pour $n\in\mathbb{N}$, $B^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}M^k(2I)^{n-k}$

Pour $n\geqslant 1$, on peut couper la somme :

$B^n=(2I)^n+\sum\limits_{k=1}^{n}(\binom{n}{k}(3^{k-1}M)(2I)^{n-k})$

$B^n=2^nI+\sum\limits_{k=1}^{n}(\binom{n}{k}3^{k-1}.2^{n-k}M)$

On factorise par la matrice M : $\sum\limits_{k=1}^{n}(\binom{n}{k}3^{k-1}.2^{n-k}M)=\frac{1}{3}((\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k.2^{n-k})-1)M$

Ainsi $\boxed{\text{Pour } n\in\mathbb{N}^* : B^n=2^nI+\frac{1}{3}(5^n-1)M}$

Remarque : cette formule reste vraie pour $n=0$

5. On peut proposer $X=\begin{pmatrix}-a\\1\\0\end{pmatrix}$ et par exemple $Y=\begin{pmatrix}-a^2\\0\\1\end{pmatrix}$. La résolution des systèmes linéaires autre que les systèmes de Cramer n'est pas au programme.

On calcule $MX=0$ et $MY=0$, les vecteurs sont non nuls, ce sont des vecteurs propres.

Poser à l'oral la question : à votre avis, M est-elle diagonalisable (habituellement, on leur donne P et D et on leur fait vérifier $PD=MP$ ...)

Exercice sans préparation T2

Soit p un réel de $]0;1[$. Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant chacune une loi de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

On note $Y = X_1X_2$ et $Z = X_2X_3$.

1. Calculer les coefficients de corrélation linéaire entre Y et Z.
2. Calculer $V(Y+Z)$.

Solution :

1. Comme X_1 et X_2, X_3 sont indépendants :
   $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) = p^2$ et $\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2^2)\mathbb{E}(X_3)$
   X_2^2 suit aussi une loi de Bernoulli de paramètre p
   $\text{Cov}(Y,Z) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$ (On peut poser à l'oral la question de l'indépendance.)
   $\mathbb{E}(Y^2) = p^2$ et $V(Y) = p^2 - p^4$, donc $\rho(X,Y) = \dfrac{p^3(1-p)}{p^2(1-p)(1+p)} \boxed{= \dfrac{p}{1+p}}$ qui est bien dans $]-1;1[$
2. Par bilinéarité de la covariance $V(Y+Z) = V(Y) + V(Z) + 2\text{Cov}(Y,Z) = 2p^3(1-p) + 2p^2(1-p)(1+p)$
   $\boxed{V(Y+Z) = 2p^2(1-p)(1+2p)}$
3. Question supplémentaire : donner la loi de Y+Z.
   $(Y+Z)(\Omega) = \{0;1;2\}$
   $\mathbb{P}([Y+Z=2] = \mathbb{P}([X_1=1] \cap [X_2=1] \cap [X_3=1]) \boxed{= p^3}$
   * On peut utiliser $2p^2 = \mathbb{E}(Y+Z) = \mathbb{P}([Y+Z=1]) + 2p^3$
   * On peut aussi traduire $[Y+Z=1] = [X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 0] \cup [X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1]$ (incompatible)
   $\mathbb{P}([Y+Z=1]) = \boxed{2p^2 - 2p^3}$
   Et donc $\mathbb{P}([Y+Z=0]) = \boxed{1 - 2p^2 + p^3}$

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECT

Juin 2023

Le bilan de la session 2023 de mathématiques voie T est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 1 et 20. La moyenne s'établit à 9,02 et l'écart-type à 4,91.

Le niveau d'ensemble des candidats reste assez hétérogène : si certaines prestations se sont avérées catastrophiques, il y en a également eu de très brillantes avec des candidats faisant preuve de bonnes capacités de réflexion.

Le jury insiste à nouveau sur sur les points suivants auprès des futur.e.s candidat.e.s et de leurs enseignant.e.s.

- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Notamment, le jury est en droit d'attendre l'esquisse qualitative d'une courbe après avoir établi un tableau de variation.
- Le jury continue de remarquer de grosses lacunes en calcul. De même, les théorèmes du cours doivent être connus avec plus de rigueur : hypothèses précises et conclusions.
- Avec la dernière réforme des programmes, l'informatique a pris une place plus importante. La quasi-totalité des sujets contenait au moins une question d'informatique. Cela sera encore le cas l'an prochain, le but étant d'interroger tous les candidats sur une partie du programme d'informatique. En particulier, il ne faut pas négliger le SQL.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre question, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts.
- La question sans préparation est aussi très importante. Il n'est pas nécessaire de la mener à son terme pour faire bonne impression. Le jury est là encore attentif aux qualités de réflexion des candidats. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, qui avaient complètement raté l'exercice préparé ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.
  Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Voici les sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T 1

Exercice principal T 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$.

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard une poignée de jetons (c'est-à-dire une partie, éventuellement vide, de l'ensemble des jetons). On note N le nombre de jetons tirés et S la somme des numéros de jetons tirés.

1. Question de cours : indépendance de deux variables aléatoires.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par N, puis la loi de N.
3. Ecrire le code d'une fonction Python `simule_S(n)` qui prend un entier n en argument, simule le tirage de la poignée de jetons et renvoie la valeur de S.
4. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le jeton n° i est dans la poignée tirée et à 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de X_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.
   (b) Montrer que, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont indépendantes.
5. (a) Exprimer S à l'aide des X_i.
   (b) Déterminer l'espérance de S.

Solution :

1. Question de cours : programme ECT2 p. 6.
2. De manière immédiate N est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
   Alors, par équiprobabilité, pour $k \in [\![0, n]\!]$:
   $$\mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$
   car un tirage favorable est donné par une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments, tandis qu'un tirage possible est une partie d'un ensemble à n éléments et il y en a 2^n (pour chaque élément, on choisit s'il est ou non dans la partie donnée).
3. Une solution est le code suivant :

```python
import numpy.random as rd

def simule_S(n):
    for i in range(1,n+1):
        p=rd.random()
        if p<1/2:
            S=S+i
    return S
```

4. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le jeton n° i est dans la poignée tirée et à 0 sinon.
   (a) La variable X_i est une variable de Bernoulli. Par équiprobabilité des poignées :
   $$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$
   car un tirage favorable revient à se donner une poignée de l'ensemble des jetons privé du jeton n° i, déjà inclus dans la poignée. Ainsi : $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$.

(b) Comme X_i et X_j sont des variables de Bernoulli, elles sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1)$ (les événements $\{X_i = 1\}$ et $\{X_i = 0\}$ sont complémentaires).

Or, d'après la question précédente : $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Par ailleurs : $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$ car se donner une poignée contenant les jetons n° i et j revient, une fois sélectionnés ces deux jetons, à choisir une poignée des $n-2$ jetons restants, c'est-à-dire une partie d'un ensemble à $n-2$ éléments.

On a donc bien $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1)$ et les variables X_i et X_j sont indépendantes.

5. (a) On a $S = \sum_{i=1}^{n} iX_i$.

(b) Comme $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ pour X et Y des variables aléatoires et a et b des réels, une récurrence prouve que :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{E}(X_i)$$

Or, pour tout i, $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}$ d'où :

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{E}(S) = \frac{n(n+1)}{4}}$$

Exercice sans préparation T 1

On dispose d'une base de données regroupant des informations sur les cafés parisiens. Son schéma relationnel est le suivant :

— Cafes (Nom : TEXT, Adresse : TEXT, Arrondissement : INTEGER, Prix_cafe : INTEGER)

Ecrire les requêtes SQL permettant d'afficher :

1. la liste des cafés dans le 14e arrondissement ;
2. le prix moyen du café dans les cafés parisiens. On pourra utiliser la fonction de moyenne AVG() ;
3. le nombre de cafés où le prix du café est à 1 euro. On pourra utiliser la fonction de comptage COUNT().

Solution :

1. Une possibilité est :

```
SELECT *
FROM Cafes
WHERE Arrondissement=14
```

2. Une possibilité est :

```
SELECT AVG(Prix_cafe)
FROM Cafes
```

3. Une possibilité est :

```
SELECT COUNT()
FROM Cafes
WHERE Prix_cafe=1
```

SUJET T 2

Exercice principal T 2

On note I la matrice unité d'ordre 3.

On considère, pour un réel m donné, la matrice : $M = \begin{pmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Cours. Matrice et formule du binôme.
2. (a) Calculer $(M+I)^3$.
   (b) Pour n entier naturel, en déduire M^n en fonction de I, M, M^2 et n.
3. On se propose de vérifier le résultat de la question 2. (b) avec un programme Python.
   (a) Ecrire le code d'une fonction `Puissance(M,n)` qui prend en argument une matrice carrée M d'ordre 3 et un entier naturel n, et qui retourne la puissance $n^{\text{ième}}$ de M.
   On pourra utiliser la commande `np.identity(n)` qui renvoie la matrice identité d'ordre n.
   (b) Compléter le code de la fonction suivante, qui prend en argument un réel m, un entier n et affiche les valeurs de M_m^n calculées par les deux méthodes.

```
import numpy as np

def affichage(m,n):
        I=np.identity(3)
        M_m=np.array([[-1,m,m],[1,-1,0],[-1,0,-1]])
        print("Puissance nieme de M  pour m = ",m)
        print("Par le calcul : ")
        print(......................)
        print("Par la formule ; ")
        print(........................)
```

4. Montrer que la matrice M est inversible et exprimer la matrice M^{-1} en fonction de I, M et M^2.
5. (a) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.
   Vérifier que si une matrice X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ de $\mathbb{R}$, alors : $Y = P^{-1}X$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre λ.
   (b) La matrice M admet-elle des valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Cours - programme de seconde année p. 4.
2. (a) *Calcul de* $(M+I)^3$:
   Le calcul donne : $M+I = \begin{pmatrix} 0 & m & m \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(M+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & m \\ 0 & -m & -m \end{pmatrix}$ et : $(M+I)^3 = 0$ (matrice nulle d'ordre 3)

(b) En remarquant que : $M = -I + (M+I)$, la formule du binôme donne, vu que $(M+I)^3 = 0$:

$$\begin{aligned}
M^n &= (-1)^n I + n.(-1)^{n-1}(M+I) + \frac{n.(n-1)}{2}.(-1)^{n-2}(M+I)^2 \\
&= (-1)^n I + (-1)^{n-1}n.M + (-1)^{n-1}n.I + (-1)^n \frac{n.(n-1)}{2}.M^2 + (-1)^n n.(n-1).M + (-1)^n \frac{n.(n-1)}{2}.I \\
&= (-1)^n \frac{n.(n-1)}{2}.M^2 + \left[(-1)^{n-1}n + (-1)^n n.(n-1)\right] M + \left[(-1)^n + (-1)^{n-1}n + (-1)^n \frac{n.(n-1)}{2}\right] I
\end{aligned}$$

soit $M^n = (-1)^n \frac{n.(n-1)}{2}\,.\,M^2 \ + \ (-1)^n n(n-2)\,.\,M \ + \ (-1)^n \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,.\,I$

ou $M^n = (-1)^n \left(\frac{n.(n-1)}{2}\,.\,M^2 \ + \ n(n-2)\,.\,M \ + \ \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,.\,I\right)$

3. (a) Programme Python :
Pour calculer la puissance n$^{\text{ième}}$ de M, on calcule les puissances successives par une boucle qui multiplie à chaque étape le résultat par M et qui est initialisée à la matrice identité.

```python
import numpy as np

def Puissance(M,n):
    Mn=np.identity(3)
    for k in range(1,n+1):
        Mn=Mn.dot(M)
    return Mn
```

(b) On complète le code à l'aide de la fonction `Puissance(M,n)`.

```python
import numpy as np

def affichage(m,n):
        I=np.identity(3)
        M_m=np.array([[-1,m,m],[1,-1,0],[-1,0,-1]])
        print("Puissance nieme de M  pour m = ",m)
        print("Par le calcul : ")
        print(Puissance(M_m,n))
        print("Par la formule ; ")
        print((-1)**n*((n*(n-1)/2)*Puissance(M_m,2)+
               n*(n-2)*M_m+((n-1)*(n-2)/2)*I))
```

4. $(M+I)^3 = 0 \iff M^3 + 3M^2 + 3M + I = 0 \iff M.\left(-M^2 - 3M - 3I\right) = I$
ce qui montre que : M est inversible et $M^{-1} = -M^2 - 3M - 3I$.

5. (a) A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $\exists P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

$X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} X \neq 0 \\ A\,.\,X = \lambda\,.\,X \end{cases}$

Alors, pour $Y = P^{-1}.\,X$:

$B\,.\,Y \underset{\substack{Y=P^{-1}.\,X \\ B=P^{-1}AP}}{=} P^{-1}.A\,.\,P\,.\,P^{-1}.X = P^{-1}.A\,.X \underset{\substack{X \text{ vect.} \\ \text{propre de } A \\ \text{associé à } \lambda}}{=} P^{-1}.\lambda\,.X = \lambda\,.\,P^{-1}.X = \lambda\,.Y$ i.e. $B\,.\,Y = \lambda\,.\,Y$

$X \neq 0$ et P^{-1} inversible $\Longrightarrow$, $P^{-1}.X \neq 0$ i.e. $Y \neq 0$

Par conséquent, $Y = P^{-1}.\,X$ est vecteur propre de B associé à $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) ◦ $M+I$ ne peut pas être inversible, sinon $(M+I)^3$ le serait.
Donc il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \neq 0$ tel que $(M+I)\,.X = 0$, i.e. $M.X = -X$: ainsi -1 est valeur propre de M.

◦ $(M+I)^3 = 0$ implique que $p(x) = (x+1)^3$ est un polynôme annulateur de M.
Donc toute valeur propre de M est racine de p; d'où : la seule valeur propre possible de M est -1.

◦ Si M était diagonalisable, il existerait deux matrices, P inversible et D diagonale, telles que $M = P^{-1}DP$.
Les termes de la diagonale étant valeurs propres de D, seraient valeurs propres de M (cf **a.**) et D serait $-I$.
Mais alors : $P^{-1}DP = P^{-1}(-I)P = -P^{-1}I\,P = -I$: absurde, car $M \neq -I$.
Donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice sans préparation T 2

1. Résoudre le plus simplement possible l'inéquation $|x-1|+|x+1| \leqslant 2$.
2. Soit une série statistique définie par $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des fréquences $f_1, f_2, ..., f_n$.

   Trouver l'ensemble E des valeurs réelles de x qui rendent la quantité $\sum_{i=1}^{i=n} f_i(x-x_i)^2$ minimale.
3. L'ensemble E est-il toujours égal à l'ensemble F des valeurs qui rendent minimale la quantité $\sum_{i=1}^{i=n} f_i|x-x_i|$?

Solution :

1. $|x-1|+|x+1|$ représente la somme des distances du point M d'abscisse x aux points d'abscisse 1 et -1 ; donc tous les points du segment $[-1;\ 1]$ sont tels que $|x-1|+|x+1|=2$ tandis que les autres points sont à une distance strictement supérieure à 2 ; donc $E=[-1;\ 1]$.
2. On dérive la fonction f définie par $f(x)=\sum_{i=1}^{i=n} f_i(x-x_i)^2$; on a : $f\,'(x)=\sum_{i=1}^{i=n} 2f_i(x-x_i)$.

   Cette dérivée s'annule en $m=\sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i$ $\left(\text{puisque } \sum_{i=1}^{i=n} f_i = 1\right)$.

   Il s'agit bien d'un minimum d'aprés le signe de la dérivée (- puis +). Donc $E=\{m\}$.
3. Non pas toujours .

   En s'inspirant de 1., on choisit : $n=2$ et $x_1=-1$ et $x_2=1$ avec $f_1=f_2=\frac{1}{2}$. Alors $F=[-1;1]$.

SUJET T 3

Exercice principal T 3

Soit n un entier strictement positif. On lance n fois un dé parfait. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de 5 (respectivement de 6) obtenus au cours de ces n lancers.

1. Cours. Définition de variables aléatoires discrètes finies indépendantes.
2. Déterminer les lois de X et de Y, puis la loi de la variable aléatoire $X + Y$.
3. (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

   (b) Écrire en Python une fonction `experience(n)` simulant le lancer de n dés et retournant le nombre de cinq et le nombre de six obtenus.
4. (a) Calculez le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) ; expliquez son signe.

   (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Expliquez.

   (c) La variable Y est-elle une fonction affine de X ?
5. Trouver des valeurs de n telles que la fréquence d'apparition d'un 5 ou d'un 6 soit égale à $\frac{1}{3}$, à $0,01$ près, avec une probabilité au moins égale à $0,9$.

Solution :

1. Cours : Indépendance mutuelle de n variables aléatoires - programme de seconde année p.10.
2. - variable aléatoire X [resp. Y] : nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes "lancer d'un dé", la probabilité de succès (obtenir cinq [resp. six]) étant égale à 1/6.

   Donc X et Y suivent $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.

   - variable aléatoire $X + Y$: nombre de cinq et de six lors des n lancers indépendants : le succès consiste à obtenir un résultat dans le sous-ensemble $\{5, 6\}$ de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la probabilité de succès est $2/6 = 1/3$.

   Donc $X + Y$ suit $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$.
3. (a) Loi conjointe du couple (X, Y) :

   - Univers (cas possibles) : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$; nombre de cas possibles : Card(Ω) $= 6^n$.

   - Évènement (X=i, Y=j) avec i et j dans $[[0; n]]$ tels que $i+j \leqslant n$; nombre d'éléments de (X=i, Y=j)$\subset \Omega$:

nombre de cas favorables	=	nombre d'emplacements parmi les n cases contenant les i cinq	$\times$	nombre d'emplacements parmi les $n-i$ cases restantes contenant les j six	$\times$	nombre de façons de remplir les $n-i-j$ cases restantes avec des nombres autres que cinq et six
	=	$\binom{n}{i}$	$\times$	$\binom{n-i}{j}$	$\times$	4^{n-i-j}

   ou : $\dfrac{n\,!}{i\,!\,j\,!\,(n-i-j)!} \times 4^{n-i-j}$ sous forme symétrique.

   Donc : $p_{ij} = \mathbb{P}((X = i, Y = j)) = \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{j} \times \dfrac{4^{n-i-j}}{6^n} = \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{j} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{i+j} . \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-i-j}$

   ou sous forme symétrique : $p_{ij} = \dfrac{n\,!}{i\,!\,j\,!\,(n-i-j)!} \left(\dfrac{1}{6}\right)^{i+j} . \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-i-j}$

   (b) Programme Python. Une possibilité :

```
import numpy.random as rd

def experience(n):
    x=0 ; y=0
```

```python
    for i in range(n):
        lancer=rd.randint(1,7)
        if lancer == 5:
            x+=1
        elif lancer == 6 :
            y+=1
    return(x,y)
```

La fonction `randint` figurant dans le calcul de la variable « lancer » est utilisée en deuxième année mais ne figure pas dans les commandes exigibles. Dans le cas hautement improbable où elle n'ait pas été vue, une variante possible est l'affectation : `lancer=int(np.floor(6*rd.random()))+1`.

```python
import numpy.random as rd

def experience(n):
    x=0 ; y=0
    for i in range(n):
        lancer=int(np.floor(6*rd.random()))+1
        if lancer == 5:
            x+=1
        elif lancer == 6 :
            y+=1
    return(x,y)
```

4. (a) Coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) :

— Comme X et Y suivent $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = n \times \frac{1}{6}$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}\, n$

— Comme $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$, $\mathbb{V}(X+Y) = n \times \frac{2}{9} = \frac{2}{9}\, n$.

$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \implies \mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\left[\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)\right]$.

Donc : $\mathrm{Cov}\,(X,Y)) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{9}\, n - 2 \times \frac{5}{36}\, n\right] = -\frac{1}{36}\, n$.

— D'où : le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) est $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y} = \dfrac{-\frac{1}{36}\, n}{\left(\sqrt{\frac{5}{36}\, n}\right)^2} = -\dfrac{1}{5}$.

Le signe négatif du coefficient de corrélation linéaire indique que globalement X et Y varient en sens contraires ; c'est logique : plus il est sorti de 5, moins il y a de places pour des 6...

(b) Si les variables X et Y étaient indépendantes le coefficient de corrélation serait nul. Ce n'est pas le cas. Autre façon de voir que X et Y ne sont pas indépendantes : si X est égal à n, Y doit être nul...

(c) Si Y était une fonction affine de X, on aurait $|\rho_{X,Y}| = 1$, ce qui n'est pas le cas.

5. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, $\mathbb{P}(|f_n - p| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$; on a, puisque $p = \frac{1}{3}$:

$\mathbb{P}\left(\left|f_n - \frac{1}{3}\right| < 0{,}01\right) \geqslant 1 - \frac{2.10^4}{9n}$.

Pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à $0{,}9$, il suffit que $1 - \frac{2.10^4}{9n} \geqslant 0{,}9$, c.à d. : $n \geqslant 22223$.

Exercice sans préparation T 3

Soit $E = \{M \ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M^2 - 5M + 4I = 0\}$.

1. Montrer que E a au moins 4 éléments.
2. Déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.
3. Montrer que E est infini.

Solution :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
2. Les valeurs propres de d'une matrice de E sont dans $\{1; 4\}$ (car le polynôme $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est annulateur). D'autre part toute matrice de la forme PDP^{-1}, avec des 1 ou des 4 sur la diagonale de D, et P inversible est trivialement dans E.
   Donc les diagonalisables de E sont de la forme PDP^{-1} avec D diagonale avec des coefficients diagonnaux appartenant à $\{1; 4\}$ et P inversible.
3. Pour tout t réel, E contient les matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. En effet M_t est diagonalisable et s'écrit $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$ et vérifie donc trivialement $M^2 - 5M + 4I = 0$. On peut aussi faire le calcul direct évident.

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECT

Juin 2024

Le bilan de la session 2024 de mathématiques voie T est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 2 et 18. La moyenne s'établit à 8,94 et l'écart-type à 4,23.

Le niveau d'ensemble des candidats reste assez hétérogène : certaines prestations se sont avérées catastrophiques tandis que le jury a également pu remarquer des candidats très brillants faisant preuve de bonnes capacités de réflexion.

Le jury insiste à nouveau sur sur les points suivants auprès des futurs candidats et de leurs enseignants.

- Le jury continue de remarquer l'existence d'importantes lacunes en calcul chez certains candidats. De même, les théorèmes du cours doivent être connus avec plus de rigueur : hypothèses précises et conclusions.
- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Notamment, le jury est en droit d'attendre l'esquisse qualitative d'une courbe après avoir établi un tableau de variation.
- Dans le sillage de l'an dernier, suite à l'introduction des nouveaux programmes, la totalité des sujets contenait au moins une question d'informatique, faisant intervenir soit le langage Python, soit le SQL. On note des progrès en ce domaine, en particulier alors que l'an dernier le jury pouvait noter plusieurs candidats ayant fait l'impasse totale sur le SQL, cela n'a pas été autant le cas cette année. L'informatique sera autant présente lors des sessions futures du concours et il faut donc continuer dans cette voie.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre de questions, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts. Le jury apprécie particulièrement les candidats attentifs à la cohérence de leurs résultats, notamment quand cela leur permet de détecter des erreurs puis de les corriger.
- La question sans préparation est aussi très importante. Il n'est pas nécessaire de la mener à son terme pour faire bonne impression. Le jury est là encore attentif aux qualités de réflexion des candidats. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, après avoir raté l'exercice préparé, ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.
  Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Voici les sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T 1

Exercice T 1

1. Cours.
   Définition d'une suite arithmétique.
   Somme des n premiers entiers naturels strictement positifs.
   En déduire la somme des n premiers impairs.

   Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .
   La cible d'un forain est partagée en n zones délimitées par n cercles concentriques de rayons respectifs $1, 2, \ldots, n$.
   Pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, Z_k est la zone délimitée par les cercles de rayons $k-1$ et k.
   On note Z_1 le disque de rayon 1.
   On note Z_0 la zone hors de la cible.
   Jean, muni d'un arc et de flèches, doit s'entraîner pour les prochains J.O.
   Lorsqu'il tire, il touche la cible 3 fois sur 4 .
   Lorsqu'il touche la cible, la probabilité qu'il atteigne la zone Z_k est proportionnelle à l'aire de Z_k.
   On admettra que la probabilité qu'il touche l'un des cercles délimitant les zones est nulle.
2. (a) Quelle est l'aire a_k de Z_k pour $k \in \{1, .., n\}$?
   (b) On note p_k la probabilité que la flèche atteigne Z_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ Que vaut p_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$?
3. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la zone atteinte lors d'un tir.
   Ecrire, en Python, une fonction `simuleX(n)` qui prend en argument l'entier n et renvoie une simulation de X.
   On pourra, lorsque Jean atteint la cible, choisir au hasard un élément entre 1 et n^2 et retourner le numéro de la zone atteinte.
   Par exemple, si $n = 4$ et si on choisit 8 dans $\{1, \ldots, 16\}$, alors X prend la valeur 3.
4. Jean tire une flèche.
   S'il atteint Z_k avec $k \in \{1, \ldots, n\}$ il gagne $g_k = n^2 - k^2 + 1$ et ne gagne rien s'il rate la cible ($g_0 = 0$).
   On appelle G_n la variable aléatoire égale au gain pour un tir.
   On admet que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.
   Quelle est l'espérance $\mathbb{E}(G_n)$ de G_n ?
5. Jean et Martin s'affrontent et tirent chacun une flèche.
   Martin, comme Jean, atteint la cible 3 fois sur 4 et la probabilité qu'il atteigne la zone Z_k est alors encore proportionnelle à l'aire de Z_k.
   On suppose que les tirs sont indépendants.
   Quelle est la probabilité que le gain de Martin soit supérieur ou égal à celui de Jean ?

Solution :

1. Cours : $(u_n)_{n\in N}$ est arithmétique $\Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R} \quad \forall n \in N \quad u_{n+1} = u_n + r$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

2. (a) $\forall k \in \{2,..,n\} \quad a_k = \pi k^2 - \pi(k-1)^2 = (2k-1)\pi$ et $a_1 = \pi$.

   (b) Soit C l'événement : « Jean atteint la cible ». $p_0 = 1 - P(C) = \dfrac{1}{4}$. Pour $k \in \{1,\dots,n\}$, on pose $p'_k = P_C$(« Z_k atteint »). Les p'_k où $k \in \{1,..n\}$ sont proportionnels aux n premiers impairs, donc :

$$\frac{p'_1}{1} = \dots = \frac{p'_k}{2k-1} = \dots = \frac{p'_n}{2n-1} = \frac{\sum_{k=1}^n p'_k}{\sum_{k=1}^n (2k-1)} = \frac{1}{n^2}$$

   Donc $\forall k \in \{1,\dots,n\} \quad p'_k = \dfrac{2k-1}{n^2}$ et $\quad p_k = \dfrac{3}{4}p'_k = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2k-1}{n^2}$

3. Python.

```python
import numpy as np
import numpy. random as rd

def X(n) :
    if rd.randint(1,4)==1 :
        z=0
    else:
        x=rd. randint(1, n**2+1)
        k=1
        while x>k**2 :
            k=k+1
        z=k
    return z
```

Explications : On teste si la cible est ratée : on a une chance sur 4 de choisir 1 dans $\{1,2,3,4\}$ et alors $z = 0$ sinon on choisit un entier x entre 1 et n^2 compris et on cherche le numéro de la zone où se trouve x.

4. Par définition $\mathbb{E}(G_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k g_k$ Or $g_0 = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\mathbb{E}(G_n) &= \sum_{k=1}^{n} p'_k g_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2}\left(n^2 - k^2 + 1\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\left(n^2+1\right)\sum_{k=1}^{n}(2k-1) - \sum_{k=1}^{n}\left(2k^3 - k^2\right)\right] = n^2 + 1 - \frac{n+1}{6n}\left(3n^2+n-1\right)
\end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\mathbb{E}(G) = \frac{3}{4}\left[n^2 + 1 - \frac{n+1}{6n}\left(3n^2+n-1\right)\right]$$

5. Soit J_k l'événement : « Jean tire et atteint Z_k » pour $k \in \{0,1,\dots,n\}$ M_k : "« la flèche de Martin atteint le disque de rayon k » pour $k \in \{1,\dots,n\}$ et M_0 : « Martin atteint la cible ou la rate ».
Soit A : « le gain de Martin est supérieur ou égal à celui de Jean ».
Alors :

$$A = \bigcup_{k=0}^{n}\left(J_k \bigcap M_k\right) \qquad \text{(union disjointe)}.$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=0}^{n} P\left(J_k\right) \times P\left(M_k\right) \text{ (tirs indépendants)} \\
&= \frac{1}{4} \times 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4}\frac{2k-1}{n^2} \times \frac{3}{4}\frac{k^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{9}{16n^4}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3(n+1)\left(3n^2+n-1\right)}{32n^3}
\end{aligned}$$

Exercice sans préparation T 1

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de P.

1. Calculer AP.
2. Donner des valeurs propres de A et des vecteurs propres associés.
3. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. Calculer $P^{-1}AP$. La matrice A est-elle diagonalisable ? est-elle inversible ?

Solution :

1. $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. On remarque que : $AC_1 = C_1, AC_2 = 2C_2$ et $AC_3 = -C_3$
   Comme les C_k sont non nuls, on en déduit que :
   - 1 est valeur propre et C_1 est un vecteur propre associé ;
   - 2 est valeur propre et C_2 est un vecteur propre associé ;
   - -1 est valeur propre et C_3 est un vecteur propre associé.
3. On résoud $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b - c \\ y = -a + b \\ z = a + b - c \end{cases}$
   Le système est de Cramer Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$.
   D est diagonale, A est donc diagonalisable.
   D est inversible car sans 0 sur la diagonale. $A = PDP^{-1}$ est invesible comme produit de trois matrices inversibles.
   N.B. A est diagonalisable car elle a trois valeurs propres distinctes (hors programme).

SUJET T 2

Exercice T 2

On considère X une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ et de loi uniforme sur $]0,1[$.
On pose : $Z = \dfrac{1-X}{X}$.

1. Définition d'une variable aléatoire à densité.
2. Déterminer $\mathbb{P}(Z \geqslant 2)$.
3. (a) Vérifier que Z prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.
   (b) Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $a \leqslant b$. Déterminer $(\alpha,\beta) \in]0,1[^2$ tels que $\alpha \leqslant \beta$ et que :
   $$a \leqslant Z \leqslant b \Longleftrightarrow \alpha \leqslant X \leqslant \beta$$
   (c) En déduire $\mathbb{P}(Z \in [a,b])$ puis la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.
4. Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
5. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?
6. (a) Vérifier que, pour $0 < a \leqslant b$, $\mathbb{P}(a \leqslant Z \leqslant b) = \mathbb{P}(1/b \leqslant Z \leqslant 1/a)$.
   Qu'en déduit-on pour les lois de Z et de $1/Z$?
   (b) Retrouver ce résultat en exprimant la variable $1/Z$ en fonction de $Y = 1 - X$.
7. On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. On note X la longueur du morceau de gauche.
   Quelle est la probabilité pour que l'un des deux morceaux soit au moins deux fois plus long que l'autre ?

Solution :

1. Programme ECT 2 p. 9.
2. Par un calcul immédiat : $\mathbb{P}(Z \geqslant 2) = \mathbb{P}(X \leqslant 1/3) = 1/3$.
3. (a) Comme $X > 0$ et $1 - X > 0$, $Z > 0$.
   (b) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x} - 1$. On vérifie que f est une bijection décroissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{1}{1+y}$. On en déduit que :
   $$a \leqslant Z \leqslant b \Longleftrightarrow a \leqslant f(X) \leqslant b \Longleftrightarrow f^{-1}(b) \leqslant X \leqslant f^{-1}(a)$$
   On peut donc choisir $\alpha = f^{-1}(b) = \dfrac{1}{1+b}$ et $\beta = f^{-1}(a) = \dfrac{1}{1+a}$.
   (c) On en déduit que : $\mathbb{P}(Z \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in \left[\dfrac{1}{1+b}, \dfrac{1}{1+a}\right] = \dfrac{1}{1+a} - \dfrac{1}{1+b} = \dfrac{b-a}{(1+a)(1+b)}$ Soit $x > 0$. De même :
   $$\mathbb{P}(Z \leqslant x) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(f(X) \leqslant x) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(X \geqslant f^{-1}(x)) \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$
4. On peut écrire :
   $$\mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1+x} = \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x f_Z(t)\,\mathrm{d}t$$
   avec
   $$f_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction f_Z est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

La fonction f_Z est donc une densité de probabilité et Z est bien une variable à densité.

5. On peut calculer, pour $A > 0$ fixé :

$$\int_0^A \frac{x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right]_0^A = \ln(1+A) + \frac{1}{1+A} - 1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$$

La variable aléatoire Z n'admet donc pas d'espérance.

6. (a) Le résultat demandé découle de 3.c) en remarquant que :

$$\frac{1/a - 1/b}{(1+1/b)(1+1/a)} = \frac{(b-a)/ab}{(1+a)(1+b)/ab} = \frac{b-a}{(1+a)(1+b)}$$

On en déduit de manière immédiate que Z et $1/Z$ ont la même loi car

$$\mathbb{P}(a \leqslant 1/Z \leqslant b) = \mathbb{P}(1/b \leqslant Z \leqslant 1/a) = \mathbb{P}(a \leqslant Z \leqslant b)$$

.

(b) En posant $Y = 1 - X$, on obtient $Z = \dfrac{Y}{1-Y}$ d'où $1/Z = \dfrac{1-Y}{Y}$. Or Y suit également une loi uniforme sur $]0,1[$ donc Z et $1/Z$ suivent la même loi.

7. Le morceau de gauche est de longueur X, celui de droite de longueur $1 - X$. En notant toujours $Z = \dfrac{1-X}{X}$, l'événement « l'un des deux morceaux est au moins deux fois plus long que l'autre » s'écrit $\{Z \geqslant 2\} \cup \{1/Z \geqslant 2\}$. Les événements $\{Z \geqslant 2\}$ et $\{1/Z \geqslant 2\}$ sont incompatibles d'où :

$$\mathbb{P}(\{Z \geqslant 2\} \cup \{1/Z \geqslant 2\}) = \mathbb{P}(Z \geqslant 2) + \mathbb{P}(1/Z \geqslant 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

d'après les questions 2., 3.c) et 6.

Exercice sans préparation T 2

On considère une base de données `triangles` constituée d'une seule table dont le schéma relationnel est le suivant :

`triangles( idt:integer, ab:integer, ac:integer, bc:integer)`

Chaque ligne représente les longueurs d'un triangle ABC ainsi qu'un identificateur unique `idt` qui joue donc le rôle de clé primaire.

On rappelle les instructions suivantes en SQL :

— la fonction `COUNT` renvoie le nombre de résultats d'une requête ;

— la fonction `MAX` renvoie la valeur maximale des résultats d'une requête.

1. Ecrire une requête SQL permettant d'obtenir la liste des triangles équilatéraux.
2. Ecrire une requête SQL permettant d'obtenir le nombre de triangles rectangles en A.
3. Ecrire une requête SQL permettant d'obtenir le triangle rectangle en A de périmètre maximal.

Solution :

1.
```
SELECT *
FROM triangles
WHERE ac=ab AND ac=bc
```

2.
```
SELECT COUNT(*)
FROM triangles
WHERE ac*ac+ab*ab=bc*bc
```

3. Avec la fonction MAX
```
SELECT idt, MAX(ab+ac+bc)
FROM triangles
WHERE ac*ac+ab*ab=bc*bc
```
ou sinon, en triant les résultats (moins bien) :
```
SELECT idt, ab+ac+bc AS p
FROM triangles
WHERE ac*ac+ab*ab=bc*bc ORDER BY p DESC
```

SUJET T 3

Exercice T 3

On admet dans cet exercice le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

1. Définition des fonctions puissances généralisées (exposant réel).
2. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\ln(x) \leqslant x - 1$

   (b) En déduire que, pour tout $x > 0$: $\ln x \geqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.
3. On pose $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

   (b) Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe grâce à la question 2.b).

   (c) Déterminer, si elles existent, les quatre limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(f(x)), \quad \lim_{x \to 0^+} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(f(x)) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

4. Déduire des question précédentes que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$$

5. On pose $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

   (a) Pour $n \geqslant 1$, simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

   En déduire, pour $n \geqslant 1$, un encadrement de u_{n+1} faisant intervenir u_n.

   (b) Montrer par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leqslant u_n \leqslant e^{n-1}$.

   (c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Solution :

1. Programme ECT 1 p. 15.
2. (a) C'est de la convexité. Ou bien on considère la fonction $\phi : x \mapsto \ln(x) - x + 1$. Alors ϕ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\phi'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$. Ainsi $\phi'(x) > 0$ pour $0 < x < 1$, $\phi'(x) < 0$ pour $x > 1$ et $\phi'(1) = 0$. On en déduit que la fonction ϕ admet un maximum en $x = 1$ d'où, pour $x > 0$, $\phi(x) \leqslant \phi(1) = 0$ et donc finalement : $\boxed{\ln x \leqslant x - 1}$ pour $x > 0$.

   (b) Soit $x > 0$. Alors $\dfrac{1}{x} > 0$ donc par la question précédente :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} - 1 \quad \text{soit} \quad -\ln x \leqslant \frac{1}{x} - 1 \quad \text{d'où finalement} \quad \boxed{\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}}$$

3. On pose $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

(a) Par définition des fonctions puissances générales,

$$f(x) = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

Et donc, si D_f désigne l'ensemble de définition de f :

$$\begin{aligned}
x \in D_f &\iff x \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} > 0 \\
&\iff x > 0 \text{ ou } (x < 0 \text{ et } -\frac{1}{x} < 1) \\
&\iff x > 0 \text{ ou } (x < 0 \text{ et } -x > 1) \text{ par passage à l'inverse pour des nombres positifs} \\
&\iff x > 0 \text{ ou } (x < 0 \text{ et } x < -1) \\
&\iff x > 0 \text{ ou } x < -1
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$$

(b) La fonction f est dérivable sur D_f par les théorèmes généraux et, pour $x \in D_f$:

$$\begin{aligned}
\underline{f'(x)} &= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right) \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \times \frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right) \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \underline{\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\
&\geqslant 1 - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} \quad \text{par la question 1.b)} \\
&\geqslant 1 - \frac{x+1}{x+1} \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in D_f$: $\boxed{f'(x) \geqslant 0}$

(c) Remarquons tout d'abord que $\ln(f(x)) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Pour le calcul de la limite en 0^+ on écrit alors :

$$\ln(f(x)) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + x \ln(x+1)$$

Alors, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x+1) = 0^+$. Finalement :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln f(x) = 0^+} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1}$$

Pour la limite en $+\infty$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln f(x) = 1} \quad \text{puis} \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = e}$$

4. La dérivée de f est positive sur $]0,+\infty[$ d'après la question 2.b) donc la fonction f est croissante sur cet intervalle. On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(1) \leqslant f(n) \leqslant \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

soit :

$$\boxed{2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e}$$

ce qui est le résultat demandé.

5. On pose $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
   (a) On calcule :

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

   Par la question précédente, on a donc, pour $n \geqslant 1$:

   $$2 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant e \quad \text{soit} \quad \boxed{2u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant eu_n}$$

   car u_n est positif.
   (b) Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ et donc $2^0 = 1 \leqslant u_1 \leqslant e^0 = 1$. La propriété est donc vraie.
   Soit maintenant $n \geqslant 1$ tel que $2^{n-1} \leqslant u_n \leqslant e^{n-1}$. Alors, par la question précédente : $2u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant eu_n$ et par l'hypothèse de récurrence $2^n = 2 \times 2^{n-1} \leqslant 2u_n$ tandis que $eu_n \leqslant ee^{n-1} = e^n$. On en déduit donc que $2^n \leqslant u_{n+1} \leqslant e^n$, ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.
   On en déduit donc, en vertu du principe de récurrence que :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leqslant u_n \leqslant e^{n-1}}$$

   (c) L'inégalité précédente se réécrit, pour $n \geqslant 1$:

   $$\frac{2^n}{2} \leqslant \frac{n^n}{n!} \leqslant \frac{e^n}{e}$$

   De la première inégalité, en passant à l'inverse on obtient, toutes les quantités étant positives : $\dfrac{n!}{n^n} \leqslant 2\dfrac{1}{2^n}$ soit encore $n! \leqslant 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ tandis que la seconde donne, par des calculs similaires : $\dfrac{n!}{n^n} \geqslant e\dfrac{1}{e^n}$ soit encore $n! \geqslant e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. En rassemblant ces deux inégalités, on a donc finalement prouvé, pour $n \geqslant 1$:

   $$\boxed{e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n}$$

Exercice sans préparation T 3

Alice et Bob s'intéressent au lancer de trois pièces équilibrées et plus particulièrement à la probabilité que les trois pièces tombent du même côté.

1. Ecrire le code Python du fonction `simule3()` qui simule le lancer des trois pièces équilibrées et renvoie `True` si les trois pièces tombent du même côté et `False` sinon.
2. Alice tient le raisonnement suivant : « si je lance trois pièces ordinaires, il y a une chance sur quatre pour qu'elles tombent toutes les trois du même côté : sur les huit tirages possibles, seuls PPP et FFF sont favorables. ».
   Quant à Bob, voici ce qu'il dit : « si je lance trois pièces, il y en a toujours deux qui tombent du même côté. Il y a une chance sur deux pour que la troisième tombe de ce côté ».
   Lequel de ces deux raisonnements est correct ? Expliquez pourquoi, ainsi que l'erreur commise dans le raisonnement fautif.

Solution :

1.
```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simule3():
    s=0
    for i in range(3):
        s=s+rd.randint(2)
    return (s==0 or s==3)

# il est alors facile de réaliser une estimation de la probabilité recherchée

def estimation(n):
    s=0
    for i in range(n):
        if simule3():
            s+=1
    return s/n
```

2. C'est Alice qui a raison. Elle raisonne par dénombrement en utilisant l'équiprobabilité : parmi les huit tirages possibles seuls deux sont effectivement favorables.
   Dans le raisonnement de Bob, il y a un conditionnement implicite fautif. Il fait comme s'il conditionnait par un événement de probabilité 1, mais ce faisant il néglige le fait que, s'il y a effectivement toujours au moins deux pièces qui tombent du même côté, il ne sait pas desquelles il s'agit. Or, cela intervient dans le raisonnement. Formalisons cela afin de corriger le raisonnement de Bob.
   Soit pour $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$ avec $i < j$, $A_{i,j}$ l'événement « les pièces i et j tombent du même coté ». Alors $(A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,3})$ est un système complet d'événements. Notons S :« les trois pièces tombent du même côté ».
   On a de manière immédiate $\mathbb{P}(A_{i,j}) = \dfrac{1}{2}$.
   Alors :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3}) \\
&= \mathbb{P}(A_{1,2}|A_{1,3})\mathbb{P}(A_{1,3}) \\
&= \mathbb{P}(A_{1,2})\mathbb{P}(A_{1,3}) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Une autre manière de voir cela est la suivante : Bob dit que S est la même chose que $S \cap ((A_{1,2} \cup A_{1,3} \cup A_{2,3}))$, mais il se trompe en disant que cette probabilité est juste égale à une probabilité du type $\mathbb{P}(A_{i,j})$. En effet, en toute rigueur :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(S \cap (A_{1,2} \cup A_{1,3} \cup A_{2,3})) \\
&= \mathbb{P}((S \cap A_{1,2}) \cup (S \cap A_{1,3}) \cup (S \cap A_{2,3})) \\
&= \mathbb{P}(S \cap A_{1,2}) + \mathbb{P}(S \cap A_{1,3}) + \mathbb{P}(S \cap A_{2,3}) - \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3}) \\
&\quad -\mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{2,3}) - \mathbb{P}(A_{1,3} \cap A_{2,3} + \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3} \cap A_{2,3}) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$