Chapitre 9

Variables aléatoires à densité

Le but de ce chapitre est de présenter un nouveau type de variables aléatoires qui vont nous permettre de modéliser de nombreux phénomènes. On a déjà étudié les variables aléatoires discrètes dont le support est un ensemble dont on peut énumérer les éléments. On se focalise ici sur des variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$. On généralise ainsi l'étude de la loi uniforme effectuée en première année.

9.1 Variables aléatoires à densité continue par morceaux

Le concept clé de ce chapitre est la notion de *densité de probabilité*.

Définition 1 (Densité de probabilité)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. f est une densité de probabilité si elle vérifie les trois points ci-dessous.
- La fonction f est positive.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

On rappelle que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, notée F_X, est définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$. On définit à présent ce qu'est une variable aléatoire à densité.

Définition 2 (Variable aléatoire à densité)

Soient X une variable aléatoire et f une densité de probabilité.
On dit que X admet f pour densité si et seulement si sa fonction de répartition F_X vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Il est très facile de réaliser des calculs de probabilités à partir de variables aléatoires à densité.

Proposition 3 (Calculs de probabilités)

Soit X une variable aléatoire de densité f. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
- $P(X = a) = 0$.
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
- $P(X \leq a) = P(X < a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ et $P(X \geq a) = P(X > a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarques :

- On peut utiliser indifféremment des inégalités larges ou strictes.
- On peut réexprimer certaines des probabilités précédentes à l'aide de la fonction de répartition de X.

$\star$ $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$,
$\star$ $P(X \leq a) = P(X < a) = F_X(a)$,
$\star$ $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F_X(a)$.

Comme pour les variables aléatoires discrètes, on définit l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire à densité.

Définition 4 (Espérance d'une variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire de densité f.

La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est alors appelée espérance de X. Autrement dit, en cas d'existence,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

L'espérance d'une variable aléatoire à densité est toujours *linéaire*. Précisément, si X et Y sont deux variables aléatoires à densité admettant toutes deux une espérance, alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha X + \beta Y$ admet une espérance. De plus, $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

Proposition 5 (Espérance du carré d'une variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire de densité f.

La variable aléatoire X^2 admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Dans ce cas,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

Définition 6 (Variance d'une variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance.
Si $(X - E(X))^2$ admet une espérance, alors on appelle variance de X et on note $V(X)$ le réel défini par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Remarque : On peut définir l'écart-type de X, noté $\sigma(X)$, par l'égalité : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Théorème 7 (Formule de Kœnig-Hyugens)

Soit X une variable aléatoire de densité f.
X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance. Dans ce cas,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

9.2 Variables aléatoires à densité usuelles

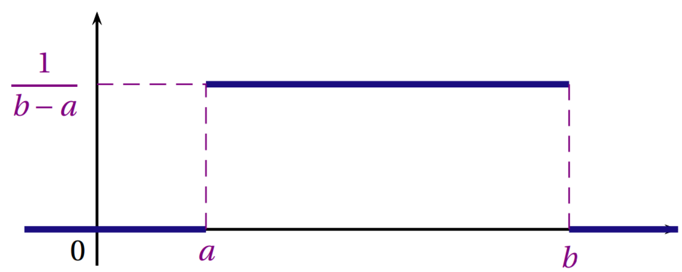
Comme pour les variables aléatoires discrètes, il y a une liste de variables aléatoires à densité à connaître par cœur. Elles sont au nombre de trois : la loi uniforme, la loi exponentielle et la loi normale.

Définition 8 (Variable aléatoire suivant la loi uniforme sur un segment)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et X une variable aléatoire.
On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ si et seulement si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in [a, b], f(t) = \frac{1}{b-a} \quad \text{et} \quad \forall t \notin [a, b], f(t) = 0.$$

Remarque : On définit également la loi uniforme sur $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ à l'aide de la même densité f.



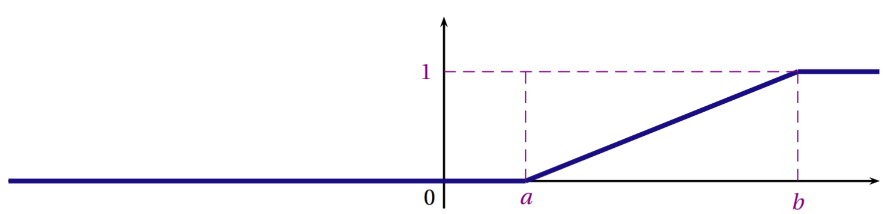
$\Longrightarrow$ Comment reconnaître une variable aléatoire suivant la loi uniforme ?

La loi uniforme sur $[a, b]$ est la loi du tirage au hasard d'un nombre dans cet intervalle : la variable X a autant de chance de tomber n'importe où dans l'intervalle $[a, b]$.

Proposition 9 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur un segment)

Soient a et b deux réels puis X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Alors,

$$\forall x \in [a, b], F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad \forall x < a, F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > b, F_X(x) = 1.$$



Proposition 10 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur un segment)

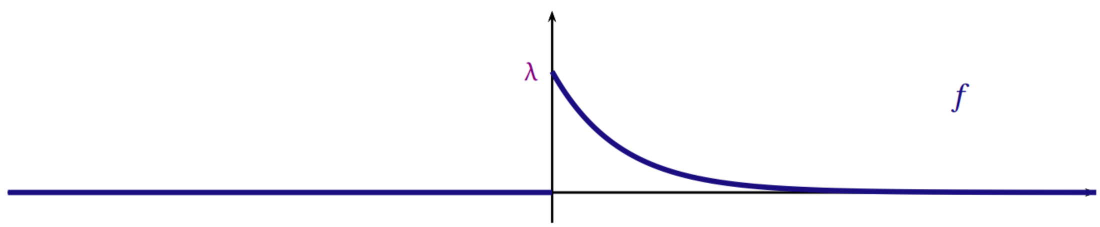
Soient a et b deux réels puis X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Alors, X admet une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Définition 11 (Variable aléatoire suivant la loi exponentielle)

Soient $\lambda > 0$ un réel strictement positif et X une variable aléatoire.
On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ si et seulement si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \geq 0, f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad \forall t < 0, f(t) = 0.$$



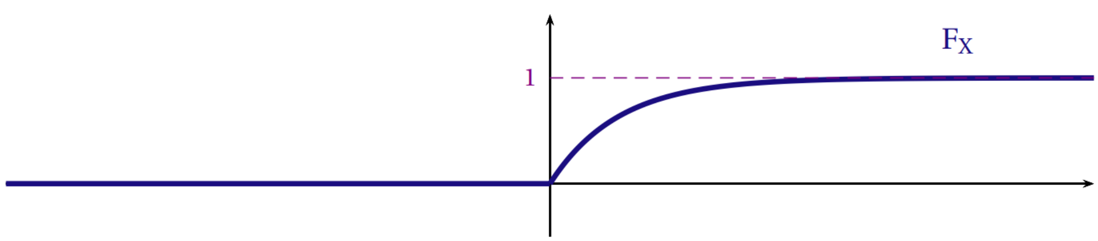
$\Longrightarrow$ Comment reconnaître une variable aléatoire suivant la loi exponentielle ?

Les lois exponentielles sont utilisées pour modéliser des durées de vie. On pourra par exemple penser à la durée de vie d'un atome radioactif ou à la durée de vie d'un composant électronique.

Proposition 12 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle)

Soient $\lambda > 0$ un réel strictement positif puis X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Alors,

$$\forall x \geq 0, F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{et} \quad \forall x < 0, F_X(x) = 0.$$



Proposition 13 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle)

Soient $\lambda > 0$ un réel strictement positif puis X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Alors, X admet une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Définition 14 (Variable aléatoire suivant la loi normale)

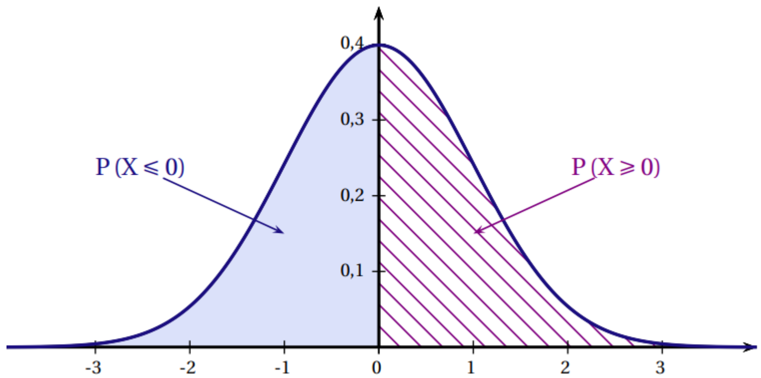
Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire.
On dit que X suit la loi normale de paramètres m et σ^2 et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Remarques :

• La loi normale est aussi appelée loi de Laplace-Gauss.

• Lorsque $m = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que X suit la *loi normale centrée réduite*. Dans ce cas, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.
La densité de la loi normale centrée réduite est représentée ci-dessous.



$\Longrightarrow$ Comment reconnaître une variable aléatoire suivant la loi normale ?

⋆ La loi normale permet de modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires.
⋆ La taille d'un être humain ou encore le poids d'une tomate suivent tous deux des lois normales.

Proposition 15 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale)

Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ puis X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t.$$

Proposition 16 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi normale)

Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ puis X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2. Alors, X admet une espérance et une variance données par :

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

On peut établir un lien entre la loi normale de paramètres m et σ^2 et la loi normale centrée réduite.

Théorème 17 (Lien entre la loi normale de paramètres m et σ^2 et la loi normale centrée réduite)

Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire.
X suit la loi normale de paramètres m et σ^2 si et seulement si $X^* = (X - m)/\sigma$ suit la loi normale centrée réduite. De manière concise,

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Longleftrightarrow X^* = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Pour effectuer des calculs à partir d'une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres m et σ^2, on se ramène systématiquement à une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de cette dernière. Elle vérifie $\Phi(0) = 1/2$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Ses valeurs sont précisées dans une table appelée *table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite* et il est *essentiel* de savoir la lire.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000