Chapitre 9

Espaces vectoriels

Ce chapitre est le premier d'algèbre linéaire, un thème central et nouveau du programme de 1D2. L'algèbre linéaire se décline en 3 chapitres : *Espaces vectoriels*, *Applications linéaires* et *Représentation matricielle d'une application linéaire*.

9.1 Espaces vectoriels

Afin d'appréhender au mieux la notion nouvelle et abstraite d'espace vectoriel, commençons par observer un exemple. On rappelle qu'on a déjà défini $\mathbb{R}^n$ comme étant l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ où $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k \in \mathbb{R}$. On peut munir cet ensemble de deux lois : une loi de composition interne appelée addition et une loi de composition externe appelée multiplication par un scalaire de la façon suivante :

$$\forall ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda \times x_1, \ldots, \lambda \times x_n).$$

Ces deux opérations vérifient 8 propriétés que nous énonçons dans le cas $n = 2$ par soucis de simplicité.

1) $\forall ((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) \in (\mathbb{R}^2)^3, ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2))$.
2) $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (0, 0) + (x_1, x_2) = (x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1, x_2)$.
3) $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (-x_1, -x_2) + (x_1, x_2) = (0, 0)$.
4) $\forall ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (\mathbb{R}^2)^2, (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2)$.
5) $\forall ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (\mathbb{R}^2)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \lambda.(x_1, x_2) + \lambda.(y_1, y_2)$.
6) $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda + \mu).(x_1, x_2) = \lambda.(x_1, x_2) + \mu.(x_1, x_2)$.
7) $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda.(\mu.(x_1, x_2)) = (\lambda\mu).(x_1, x_2)$.
8) $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 1.(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

Les huit points précédents confèrent à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ une structure d'espace vectoriel. Nous notons de manière exhaustive $(\mathbb{R}^n, +, .)$ pour insister sur les deux lois que nous avons définies sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1 (Structure d'espace vectoriel)

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe de domaine $\mathbb{R}$ notée « . ».
$(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si et seulement si :
- $(E, +)$ est un groupe commutatif (ce qui correspond aux points 1) à 4) vus précédemment),
- $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$,
- $\forall x \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$,
- $\forall x \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$,
- $\forall x \in E, 1.x = x$.

Remarques :
• Les éléments de E sont appelés les vecteurs et ceux de $\mathbb{R}$ les scalaires.
• On retiendra que la définition d'espace vectoriel comporte cinq points ; un point de structure et quatre règles de calcul.
• Les scalaires sont notés à gauche et les vecteurs sont notés à droite.

Les deux exemples fondamentaux d'espaces vectoriels avec lesquels nous allons travailler sont les suivants.

⋆ $(\mathbb{R}^n, +, .)$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace des n-uplets d'éléments de $\mathbb{R}$,

⋆ $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, .)$, $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'espace des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ Il ne faut donc pas s'inquiéter du formalisme un peu abstrait de ce cours. Dans la pratique, c'est très simple !

Proposition 2 (Règles de calcul)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

• $\forall x \in E, 0_{\mathbb{R}}.x = 0_E$.

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.0_E = 0_E$.

• $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \lambda.x = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{R}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E)$.

Etant donnés deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E_1 et E_2, on peut construire un troisième $\mathbb{R}$-espace vectoriel à l'aide du produit cartésien $E_1 \times E_2$ appelé espace vectoriel produit.

Définition 3 (Produit de deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels)

Soient $(E_1, +_1, ._1)$ et $(E_2, +_2, ._2)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On munit le produit cartésien $E_1 \times E_2$ d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe de domaine $\mathbb{R}$ notée . de la manière suivante :

$$\forall ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (E_1 \times E_2)^2, (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 +_1 y_1, x_2 +_2 y_2)$$

et

$$\forall (\lambda, (x_1, x_2)) \in \mathbb{R} \times (E_1 \times E_2), \lambda.(x_1, x_2) = (\lambda ._1 x_1, \lambda ._2 x_2).$$

$(E_1 \times E_2, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque : Cette construction se généralise sans peine à un produit fini de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. C'est par exemple ainsi que l'on construit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ avec n copies de $\mathbb{R}$.

9.2 Sous-espaces vectoriels

On définit à présent une sous-structure : la notion de sous-espace vectoriel.

Définition 4 (Sous-espace vectoriel)

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis F une partie de E.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est stable pour $+$ et . et si, muni des lois induites, $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque : Le singleton vecteur nul $\{0\}$, appelé sous-espace nul, et E sont toujours des sous-espaces vectoriels (dits triviaux) de E.

On énonce un critère pratique permettant de montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Théorème 5 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)

Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis F une partie de E.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
• $0_E \in F$,
• $\forall (x,y) \in F^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha x + \beta y \in F$.

Remarques :
• Le second point exprime que F *est stable par combinaisons linéaires.*
• Dans la pratique, pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on ne revient jamais à la définition d'espace vectoriel. On montre plutôt que cet ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu à l'aide du résultat précédent.

On étudie maintenant le comportement de la structure d'espace vectoriel relativement aux opérations ensemblistes : complémentaire, intersection et réunion.

Si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et si F est un sous-espace vectoriel de E, le complémentaire de F dans E, noté $C_E(F)$, n'est pas un sous-espace vectoriel de E puisque, par définition, il ne contient pas le vecteur nul.

Proposition 6 (Intersection de deux sous-espaces vectoriels)

Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors, $(F \cap G,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : On peut se demander si le résultat demeure vrai si on remplace l'intersection par la réunion. Ce n'est en général pas le cas. On a par contre l'énoncé suivant.
Soient $(E,+,.)$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel puis* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
$(F \cup G,+,.)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si* $F \subset G$ *ou* $G \subset F$.

Etant donnée une partie quelconque A d'un espace vectoriel E, on va maintenant montrer qu'il est possible de construire de manière naturelle un espace vectoriel à partir de A.

Définition 7 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)

Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis A une partie de E.
Le sous-espace vectoriel engendré par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

Remarque : $\mathrm{Vect}(A)$ est caractérisée par les deux propriétés ci-dessous.
⋆ $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A.
⋆ Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant A, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.

Dans la pratique, A est constitué d'un nombre fini de vecteurs $u_1, \dots, u_p$, $p \geq 1$, ce qui conduit au résultat suivant.

Proposition 8 (Descriptions du sous-espace vectoriel engendré par un nombre fini de vecteurs)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $u_1, \dots, u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E. Alors,

$$\mathrm{Vect}((u_1,\dots,u_p)) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

Remarques :

• Il est important de bien comprendre quels sont les éléments de $\mathrm{Vect}((u_1,\dots,u_p))$. Il s'agit tout simplement de l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de la famille $(u_1,\dots,u_p)$.
• Etudions deux exemples.
⋆ Soit $u \in E$. $\mathrm{Vect}(u) = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}u$. Si $u \neq 0$, alors $\mathrm{Vect}(u)$ est la droite vectorielle engendrée par u.
⋆ Soit $(u,v) \in E^2$. $\mathrm{Vect}(u,v) = \{\alpha u + \beta v, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Si u et v ne sont pas colinéaires (c'est-à-dire si $v \neq 0$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u \neq \lambda v$), alors $\mathrm{Vect}(u,v)$ est le plan vectoriel engendré par u et v.
• *Pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on peut penser à l'écrire comme un « Vect », c'est-à-dire comme un sous-espace vectoriel engendré par une partie.*

Définition 9 (Famille génératrice)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $u_1,\dots,u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E.
La famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}((u_i)_{1\leq i\leq p})$. Autrement dit, si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p, x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i.$$

9.3 Familles de vecteurs

Dans cette partie, on étudie les propriétés des familles de vecteurs d'un espace vectoriel. On commence par définir la notion de combinaison linéaire qui est centrale en algèbre linéaire.

Définition 10 (Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $u_1,\dots,u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E. Une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est un vecteur v de la forme :

$$v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, \quad \text{où} \quad (\lambda_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbb{R}^p.$$

On définit maintenant les notions de famille libre et de famille liée et on énonce leurs propriétés.

Définition 11 (Famille libre, famille liée - cas d'une famille finie)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $u_1,\dots,u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E.
• La famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre (ou encore $u_1,\dots,u_p$ sont linéairement indépendants) si et seulement si :

$$\forall (\lambda_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbb{R}^p, \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0 \implies \forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i = 0 \right).$$

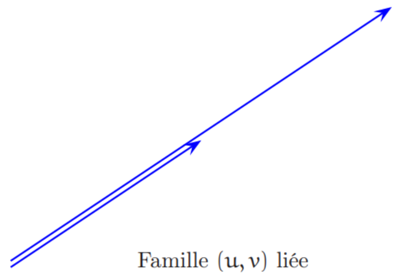
• La famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est liée si et seulement si elle n'est pas libre. Autrement dit, si et seulement si :

$$\exists (\lambda_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0,\dots,0)\}, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0 \quad \text{(relation de liaison)}.$$

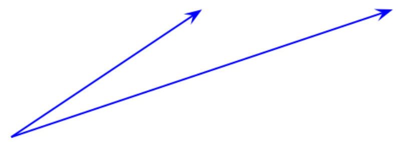
Remarques :

• Les familles libres permettent d'identifier des coefficients. Par exemple, si (x,y) est une famille libre de E et si a, b, c et d sont des scalaires tels que $ax + cy = bx + dy$, alors $a = b$ et $c = d$ (puisque $(a-b)x + (c-d)y = 0$).
• Etudions les familles libres composées de 1 ou 2 vecteurs.
⋆ Soit $u \in E$. La famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0$.

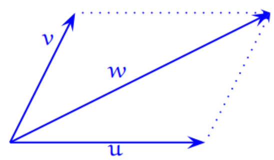
⋆ Soit $(u, v) \in E^2$. La famille (u, v) est libre si et seulement si $v \neq 0$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u \neq \lambda v$. Autrement dit, si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.
• Etudions les familles liées composées de 1 ou 2 vecteurs.
⋆ Soit $u \in E$. La famille (u) est liée si et seulement si $u = 0$.
⋆ Soit $(u, v) \in E^2$. La famille (u, v) est liée si et seulement si $v = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}, u = \lambda v$. Autrement dit, si et seulement si u et v sont colinéaires.



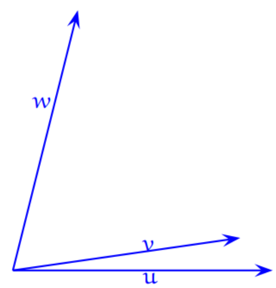
Famille (u, v) liée



Famille (u, v) libre



Famille (u, v, w) liée



Famille (u, v, w) libre

L'appartenance du vecteur nul à une famille de vecteurs fournit immédiatement une relation de liaison entre ces vecteurs.

Proposition 12 (Familles libres, familles liées et vecteur nul)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $u_1, \ldots, u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E.
• Si la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ est libre, alors elle ne contient pas le vecteur nul.
• Si la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ contient le vecteur nul, alors elle est liée.

La caractérisation ci-dessous permet de mieux appréhender les concepts de famille libre et de famille liée.

Théorème 13 (Caractérisations des familles libres et des familles liées)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $u_1, \ldots, u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E.
• La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ est libre si et seulement si aucun des vecteurs de cette famille n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.
• La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ est liée si et seulement si il existe un vecteur de cette famille qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.

On dispose du résultat évident suivant.

Proposition 14 (Sous-famille libre, sur-famille liée)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
• Toute sous-famille d'une famille libre de vecteurs de E est une famille libre.
• Toute sur-famille d'une famille liée de vecteurs de E est une famille liée.

On termine cette partie en introduisant la notion de base d'un espace vectoriel.

Définition 15 (Base d'un espace vectoriel)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $e_1, \ldots, e_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E.
La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice.

Remarque : On peut reformuler la définition d'une base comme suit.
La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ ou encore si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ telle que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$. La famille de scalaires $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ est appelée famille des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$.

On liste à présent deux bases de nos espaces vectoriels favoris.

$\star$ La base canonique de $(\mathbb{R}^n, +, .)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est formée des n vecteurs $e_1 = (1, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_{n-1} = (0, \ldots, 1, 0)$ et $e_n = (0, \ldots, 1)$.

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

$\star$ La base canonique de $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, .)$, $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, est formée des np vecteurs $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ (matrices élémentaires) dont les coefficients sont tous nuls sauf celui en place (i, j) qui vaut 1.

$$\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), A = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} E_{i,j}.$$

9.4 Définition de la dimension d'un espace vectoriel

On introduit le concept d'espace vectoriel *de dimension finie*.

Définition 16 (Espace vectoriel de dimension finie)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
E est *de dimension finie* si et seulement si E possède une famille génératrice finie.

Remarque : On a défini ce qu'était un espace vectoriel *de dimension finie* sans avoir défini le mot dimension. Pour le moment, « *de dimension finie* » est seulement un qualificatif désignant le fait pour un espace vectoriel de posséder une famille génératrice finie.

Le théorème *fondamental* est le suivant.

Théorème 17 (Théorème de la dimension finie)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*.
- E possède au moins une base $\mathcal{B}$.
- Toute base possède un nombre fini d'éléments.
- Deux bases ont le même nombre d'éléments.

On est à présent en mesure de définir la dimension d'un espace vectoriel *de dimension finie*.

Définition 18 (Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*.
La dimension de E, notée $\dim_{\mathbb{R}}(E)$, est le cardinal d'une base de E.

Remarques :
• La notion de dimension d'un espace vectoriel *de dimension finie* ayant été définie proprement, on observe qu'un espace vectoriel *de dimension finie* est tout simplement un espace vectoriel dont la dimension est finie. Dans la suite, on cessera donc d'écrire *de dimension finie* en italique.
• Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé une droite vectorielle et un espace vectoriel de dimension 2 est appelé un plan vectoriel.
• $\dim(\{0\}) = 0$. Par convention, la famille vide $\emptyset$ en est une base.

Pour finir cette sous-partie, on donne la dimension de nos deux espaces vectoriels préférés.

$\star$ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$. La famille formée des n vecteurs $e_1 = (1, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_{n-1} = (0, \dots, 1, 0)$ et $e_n = (0, \dots, 1)$ en est une base.

$\star$ $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$, $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ en est une base.

9.5 Familles libres, familles génératrices et bases en dimension finie

Etant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, l'objet de cette section est l'étude des familles libres (respectivement génératrices) de E. On majore (respectivement minore) leur cardinal et on précise parmi elles lesquelles sont des bases.

Proposition 19 (Cardinal d'une famille libre et bases)

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ puis $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
• $\mathrm{card}(\mathcal{L}) \leq n$.
• $\mathcal{L}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{card}(\mathcal{L}) = n$.

Proposition 20 (Cardinal d'une famille génératrice et bases)

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ puis $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.
• $\mathrm{card}(\mathcal{G}) \geq n$.
• $\mathcal{G}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{card}(\mathcal{G}) = n$.

Théorème 21 (Théorème de la base incomplète)

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie puis $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

Théorème 22 (Théorème de la base extraite)

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie puis $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.
Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

9.6 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels de dimension finie

Etant donnés deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ de dimension finie, on peut construire l'espace vectoriel $(E \times F,+,.)$ qui est lui aussi de dimension finie.

Proposition 23 (Dimension d'un produit cartésien d'espaces vectoriels de dimension finie)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors, $(E \times F,+,.)$ est de dimension finie. De plus,

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

Théorème 24 (Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie)

Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie puis F un sous-espace vectoriel de E.
- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$.

Remarque : Ce théorème fournit une *méthode* pour montrer que deux espaces vectoriels de dimension finie sont égaux. *Il suffit de montrer que l'un est inclus dans l'autre et qu'ils ont la même dimension.*

9.7 Rang d'une famille finie de vecteurs

Etant donnés E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis $u_1, \dots, u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E, on peut considérer le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant ces vecteurs : $\text{Vect}((u_i)_{1\leq i\leq p})$. Ce dernier étant engendré par une famille finie de vecteurs, il est de dimension finie.

Définition 25 (Rang d'une famille finie de vecteurs)

Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis $u_1, \dots, u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E.
Le rang de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$, noté $\text{rg}((u_i)_{1\leq i\leq p})$, est définie par :

$$\text{rg}((u_i)_{1\leq i\leq p}) = \dim\big(\text{Vect}((u_i)_{1\leq i\leq p})\big).$$

On énonce à présent les propriétés de base du rang d'une famille finie de vecteurs.

Proposition 26 (Propriétés du rang d'une famille finie de vecteurs)

Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ puis $u_1, \dots, u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E.
On note $r = \text{rg}((u_i)_{1\leq i\leq p})$.

- $r \leq \min(n,p)$.
- $r = p \iff$ la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre.
- $r = n \iff$ la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ engendre E.
- $r = p = n \iff$ la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base de E.

Proposition 27 (Caractérisation du rang d'une famille finie de vecteurs)

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis $u_1, \dots, u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E.
On note $r = \text{rg}((u_i)_{1 \leq i \leq p})$.
r est le maximum du cardinal d'une sous-famille libre extraite de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$. Autrement dit,

$$r = \max \left\{ \text{card}(\mathcal{L}), \mathcal{L} \text{ sous-famille libre de } (u_i)_{1 \leq i \leq p} \right\}.$$

En particulier, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, il existe une sous-famille de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ qui est libre et de cardinal k et toute sous-famille de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ de cardinal $k > r$ est liée.

On termine cette sous-partie en décrivant les transformations élémentaires ne modifiant par le rang d'une famille finie de vecteurs (car ne modifiant pas le sous-espace vectoriel engendré par ces derniers).

Proposition 28 (Les transformations élémentaires ne modifient pas le rang d'une famille finie de vecteurs.)

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis $u_1, \dots, u_p$, $p \geq 1$ vecteurs de E.

• Permutation des vecteurs : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_p, \text{rg}((u_i)_{1 \leq i \leq p}) = \text{rg}((u_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq p})$.

• Multiplication d'un vecteur par un scalaire $\lambda \neq 0$: L'opération élémentaire $u_i \leftarrow \lambda u_i$ ne modifie pas le rang de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$.

• Ajout à un vecteur d'une combinaison linéaire des autres vecteurs : L'opération élémentaire $u_i \leftarrow u_i + \displaystyle\sum_{j \neq i} \lambda_j u_j$ ne modifie pas le rang de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$.

Remarques :

• La transformation $u_i \leftarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j$ ne modifie pas le rang de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ si $\lambda_i \neq 0$.
• On peut également supprimer un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs. C'est par exemple le cas si un vecteur est nul ou si deux vecteurs sont égaux.
• Nous verrons au chapitre *Représentation matricielle d'une application linéaire* un algorithme appelé méthode du pivot de Gauss permettant de déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs.