Chapitre 8

Probabilités sur un univers fini

Le but premier de ce chapitre est d'apprendre à compter ! Un objectif majeur à atteindre est de se familiariser avec les nombreuses formules énoncées et de comprendre en quoi elles sont naturelles. On introduit ensuite un cadre rigoureux permettant de « quantifier le hasard ». Cela sera rendu possible grâce à la notion d'espace probabilisé. La chance qu'un événement A se produise sera alors mesurée à l'aide d'un nombre $P(A)$, compris entre 0 et 1.

8.1 Définition du cardinal d'un ensemble fini

On admet le théorème intuitif suivant.
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. *S'il existe une bijection de* $[\![1,n]\!]$ *sur* $[\![1,p]\!]$, *alors* $n = p$.

Définition 1 (Ensemble fini)

Soit E un ensemble.
On dit que E est un ensemble fini si et seulement si $E = \emptyset$ ou s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$.

Définition 2 (Cardinal d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble fini.
• Si $E \neq \emptyset$, alors il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$.
n est appelé le cardinal de E et on note $\text{card}(E) = n$.
• Si $E = \emptyset$, alors le cardinal de E est 0 et on note : $\text{card}(E) = 0$.

Remarques :
• Il est important de bien visualiser ce que représente le cardinal d'un ensemble fini. Il s'agit tout simplement de son nombre d'éléments. Lorsque E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$, on peut numéroter ses éléments et écrire $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
• L'unicité de la définition provient du résultat admis en amont. En effet, si n_1 et n_2 sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que E est en bijection avec $[\![1,n_1]\!]$ et avec $[\![1,n_2]\!]$, alors les ensembles $[\![1,n_1]\!]$ et $[\![1,n_2]\!]$ sont en bijection et donc $n_1 = n_2$.

Théorème 3 (Deux ensembles finis sont en bijection si et seulement si ils ont même cardinal.)

Soient A et B deux ensembles finis. Il existe une bijection de A sur B si et seulement si $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

Remarque : L'implication dont on se sert est celle de gauche à droite. *Pour montrer que deux ensembles finis ont même cardinal, je dois construire une bijection entre ces deux ensembles.*

8.2 Cardinal et opérations ensemblistes

Dans cette partie, on étudie les propriétés du cardinal relativement aux opérations ensemblistes : union, intersection, complémentaire, différence et produit cartésien.

Théorème 4 (Cardinal de la réunion de deux parties finies disjointes)

Soit E un ensemble. Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tel que A est fini, B est fini et $A \cap B = \emptyset$. Alors, $A \cup B$ est fini et :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

Remarques :
• On utilise le symbole $\sqcup$ pour désigner une union disjointe. La formule précédente se réécrit alors :

$$\text{card}(A \sqcup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

• Le théorème précédent se généralise sans peine par récurrence au cas de $n \geq 2$ parties disjointes.
Soit E un ensemble. Soient $A_1, \dots, A_n$, $n \geq 2$ parties finies de E, deux à deux disjointes. Alors, $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ est fini et :

$$card\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} card(A_k).$$

Proposition 5 (Cardinal du complémentaire d'une partie d'un ensemble fini)

Soient E un ensemble fini puis A une partie de E.
• A est fini.
• $C_E(A)$ est fini et :

$$\text{card}(C_E(A)) = \text{card}(E) - \text{card}(A).$$

• $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$. L'égalité est réalisée si et seulement si $A = E$.

Remarques :
• La preuve du second point résulte de l'égalite $E = A \sqcup C_E(A)$ et du théorème précédent.
• Le troisième point fournit une méthode pour montrer que deux ensembles finis sont égaux. Il suffit de montrer que l'un contient l'autre et qu'ils ont le même nombre d'éléments.

Proposition 6 (Cardinal de la différence de deux parties d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tel que $A \subset B$. Alors, $B \backslash A$ est fini et :

$$\text{card}(B \backslash A) = \text{card}(B) - \text{card}(A).$$

Remarque : La démonstration de ce résultat est facile. Il suffit de noter que, puisque $A \subset B$, $C_B(A) = B \backslash A$ et d'appliquer la proposition précédente.

Proposition 7 (Cardinal de la réunion de deux parties d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Alors, $A \cup B$ est fini et :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Remarques :

• La preuve de cette proposition découle de l'égalité $A \cup B = A \sqcup \big(B \backslash (A \cap B)\big)$ et des résultats sur le cardinal d'une réunion disjointe et d'une différence de parties finies.

• On prendra garde à ne pas oublier de retirer $\text{card}(A \cap B)$ lorsque l'on apprendra la formule du cardinal d'une réunion finie. En effet, dans le cas contraire, chaque élément de $A \cap B$ sera compté deux fois ; une fois dans $\text{card}(A)$ et une seconde fois dans $\text{card}(B)$.

• La proposition ci-dessus a pour corollaire immédiat le résultat suivant que l'on démontre par récurrence.

Soit E un ensemble fini. Soient $A_1, \dots, A_n$, $n \geq 2$ parties de E. Alors, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est fini et :

$$card\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} card(A_k).$$

Théorème 8 (Cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis)

Soient E et F deux ensembles finis. Alors, $E \times F$ est fini et :

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$

Remarques :

• Il est important de comprendre d'où vient la formule du cardinal de $E \times F$. Un élément de $E \times F$ est un couple dont la première coordonnée est un élément de E et la seconde un élément de F. Il y a $\text{card}(E)$ possibilités pour la première composante et $\text{card}(F)$ pour la seconde, ce qui fait $\text{card}(E) \times \text{card}(F)$ couples possibles.

• Le théorème précédent se généralise sans peine au cas de $n \geq 2$ ensemble finis.

Soient $E_1, \dots, E_n$, $n \geq 2$ ensembles finis. Alors, $E_1 \times \cdots \times E_n$ est fini et :

$$card\left(\prod_{k=1}^{n} E_k\right) = \prod_{k=1}^{n} card(E_k).$$

En particulier, si E est un ensemble fini et $n \geq 1$, alors E^n est fini et $card(E^n) = (card(E))^n$.

8.3 Bijections d'un ensemble fini sur un ensemble fini

Etant donnée une application f entre deux ensembles finis E et F, l'objet de cette partie est de montrer que la connaissance des cardinaux de ces ensembles nous donne des renseignements sur l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité éventuelles de f.

Proposition 9 (Majoration du cardinal de l'image d'une application entre deux ensembles finis)

Soient E et F deux ensembles finis non vides puis $f : E \to F$ une application. Alors,

$$\text{card}(f(E)) \leq \text{card}(E).$$

Le cas d'égalité est réalisé si et seulement si f est injective.

Remarques :

• L'inégalité écrite est claire. En effet, si $E = \{a_1, \dots, a_n\}$, alors $f(E) = \{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ contient au plus autant d'éléments que E. De plus, les $f(a_i)$, $1 \leq i \leq n$, sont deux à deux distincts si et seulement si f est injective.

• On déduit de la proposition précédente que si f est injective, alors nécessairement $\text{card}(E) = \text{card}(f(E)) \leq \text{card}(F)$.
Ceci conduit au principe des tiroirs.
Une application d'un ensemble à $n+1$ éléments vers un ensemble à n éléments ne peut pas être injective.
Plus simplement, si on doit ranger $n+1$ chaussettes dans un meuble à n tiroirs, alors l'un des tiroirs contient au moins deux chaussettes.

• On déduit également du résultat précédent que si f est surjective, alors nécessairement $\text{card}(F) = \text{card}(f(E)) \leq \text{card}(E)$.

Théorème 10 (Bijection d'un ensemble fini sur un ensemble fini)

Soient E et F deux ensembles finis non vides tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ puis $f : E \to F$ une application. Alors,

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow f \text{ est injective} \Longleftrightarrow f \text{ est surjective.}$$

Remarques :
• Il est bon de garder en tête que si f est une injection de E dans F, alors f réalise toujours une bijection de E sur $f(E)$.
• Le théorème précédent fournit une méthode pour montrer qu'une application $f : E \to F$ entre deux ensembles finis est une bijection. Il suffit de montrer que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ et que f est injective ou surjective.

8.4 Cardinal de certains ensembles de fonctions

Etant donnés deux ensembles finis E et F, le but de cette partie est de compter le nombre d'applications de E vers F puis le nombre d'injections de E dans F et enfin le nombre de bijections de E sur F.

Théorème 11 (Nombre d'applications d'un ensemble fini vers un ensemble fini)

Soient $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n.
Le nombre d'applications de E vers F est n^p. Autrement dit,

$$\text{card}\left(F^E\right) = (\text{card}(F))^{\text{card}(E)}.$$

Remarques :
• Il est important de comprendre d'où vient la formule du cardinal de F^E. On écrit $E = \{a_1, \ldots, a_p\}$. Pour chaque $k \in [\![1, p]\!]$, il y a $\text{card}(F) = n$ possibilités pour le choix de $f(a_k)$. Ceci nous conduit à n^p applications de E vers F différentes.
• On peut voir une application d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments comme une succession de p tirages, *avec remise*, dans un ensemble à n éléments. Ainsi, le nombre de tirages successifs *avec remise* de p objets dans un ensemble à n éléments est n^p.
• On peut également voir une application d'un ensemble à p éléments vers un ensemble F à n éléments comme un p-uplet formé d'éléments de F. Ainsi, le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est aussi n^p.
• A l'aide de la remarque précédente, on peut par exemple compter le nombre total de grilles au loto foot, jeu consistant à trouver le résultat de 14 matches parmi : victoire de la première équipe, match nul ou défaite de la première équipe. On est ici amené à compter le nombre de 14-uplets d'un ensemble à 3 éléments.
On notera que dans tout ce qui précède la notion *d'ordre* est essentielle. Dans le cas du loto foot, on précise d'abord le résultat du premier match, puis du second etc...

Proposition 12 (Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini)

Soient $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n.
• Si $p > n$, alors le nombre d'injections de E dans F est 0.
• Si $1 \leq p \leq n$, alors le nombre d'injections de E dans F est $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$.

Remarques :
• Il est important de comprendre d'où vient la formule du cardinal de l'ensemble des injections de E dans F. On suppose que $1 \leq p \leq n$. On écrit $E = \{a_1, \ldots, a_p\}$. Il y a $\text{card}(F) = n$ possibilités pour le choix de $f(a_1)$, puis $\text{card}(F) - 1 = n - 1$ possibilités pour le choix de $f(a_2)$ (puisque a_1 et a_2 ont des images différentes), puis $\ldots$, puis $\text{card}(F) - p + 1 = n - p + 1$ possibilités pour le choix de $f(a_p)$. Ceci nous conduit à $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ injections de E dans F différentes.
• On peut voir une injection d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments comme une succession

de p tirages, *sans remise*, dans un ensemble à n éléments. Ainsi, le nombre de tirages successifs *sans remise* de p objets dans un ensemble à n éléments est $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$.
• On peut également voir une injection d'un ensemble à p éléments dans un ensemble F à n éléments comme un p-uplet formé d'éléments deux à deux *distincts* de F. Ainsi, le nombre de p-uplets d'éléments deux à deux *distincts* d'un ensemble à n éléments est aussi $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$.
On peut alors par exemple compter le nombre de listes possibles au tiercé, jeu consistant à trouver les numéros des 3 chevaux (parmi 18) arrivés en tête d'une course. On est ici amené à compter le nombre de triplets d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à 18 éléments.
On notera que dans tout ce qui précède la notion *d'ordre* est essentielle. Dans le cas du tiercé, on précise d'abord le numéro du cheval ayant obtenu la première place, puis le numéro du cheval ayant obtenu la seconde place et enfin le numéro du cheval ayant obtenu la troisième place.

Proposition 13 (Nombre de bijections d'un ensemble fini sur un ensemble fini)

Soient $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n.
• Si $p \neq n$, alors le nombre de bijections de E sur F est 0.
• Si $p = n$, alors le nombre de bijections de E sur F est $n!$.

8.5 Arrangements et combinaisons

L'objectif de cette partie est de présenter deux concepts combinatoires : la notion d'arrangement et celle de combinaison, de préciser le lien qui les unit et d'étudier leurs principales propriétés.

Définition 14 (Arrangement p à p)

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis E un ensemble fini non vide de cardinal n.
Un arrangement p à p (ou une p-liste) des n éléments de E est un p-uplet sans répétition d'éléments de E.

Remarque : Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $1 \leq p \leq n$. On note : $A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
D'après la partie précédente, le nombre d'arrangements p à p de E est A_n^p. Par convention, on pose :
$\forall n \in \mathbb{N}, A_n^0 = 1$ et $A_n^p = 0$ si $p > n$.

Définition 15 (p-combinaison)

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ puis E un ensemble à n éléments. Une p-combinaison des n éléments de E est une partie de E à p éléments.

On précise à présent le nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments.

Proposition 16 (Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments)

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ puis E un ensemble à n éléments. On note $\dbinom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments de E.

• Si $p > n$, alors $\dbinom{n}{p} = 0$.

• Si $0 \leq p \leq n$, alors $\dbinom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

Remarques :

• On trouvera également la notation anglophone C_n^p pour désigner $\binom{n}{p}$. Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux en référence à leur usage dans la formule du binôme de Newton ci-dessous.
• La preuve de cette proposition est immédiate si $p > n$ ou si $p = 0$. Si $1 \leq p \leq n$, on partitionne l'ensemble des arrangements p à p des n éléments de E, dont le cardinal est A_n^p, en $\binom{n}{p}$ classes formées de p-uplets de même support, dont chacune contient $p!$ éléments (nombre de permutations différentes d'un p-uplet donné).
• Dans la pratique, lorsque l'on veut calculer $\binom{n}{p}$ avec de « vrais » nombres, on utilise la formule $\dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$ et non celle avec les trois factorielles.
• On peut voir une p-combinaison d'un ensemble à n éléments comme un tirage *simultané* de p objets de cet ensemble. Ainsi, le nombre de tirages *simultanés* de p objets parmi n est $\binom{n}{p}$.

Grâce à cette interprétation, on peut par exemple compter le nombre de grilles au loto ($\binom{49}{6}$) ou encore le nombre de mains au poker ($\binom{32}{5}$) car, dans chacun de ces cas, *l'ordre des boules ou des cartes n'a pas d'importance*.
De manière générale, on se souviendra qu'un tirage simultané de p objets est équivalent à une succession de p tirages *sans remise* où l'on ne tient pas compte de l'ordre des éléments.

On énonce certaines propriétés des coefficients binomiaux ainsi que la formule du binôme de Newton puis on calcule le nombre de parties d'un ensemble fini.

Proposition 17 (Symétrie des coefficiens binomiaux, formule de Pascal et binôme de Newton)

• Symétrie des coefficients binomiaux : Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq p \leq n$. Alors, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

• Formule de Pascal : Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Alors, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

• Formule du binôme de Newton : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque : La formule de Pascal permet de remplir le triangle de Pascal.

Esquisses de preuves :

⋆ Symétrie des coefficients binomiaux : On note $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties à p éléments d'un ensemble E à n éléments et $\mathcal{P}_{n-p}(E)$ l'ensemble des parties à $n-p$ éléments de E.
On montre que l'application $\varphi : \mathcal{P}_p(E) \to \mathcal{P}_{n-p}(E)$ définie par : $\forall A \in \mathcal{P}_p(E), \varphi(A) = C_E(A)$ est une bijection.

⋆ Formule de Pascal : On compte de deux manières les parties à $p+1$ éléments d'un ensemble E à $n+1$ éléments. On sait déjà qu'il y en a $\binom{n+1}{p+1}$. Pour obtenir le membre de gauche de la formule, on fixe un élément a de E et on compte le nombre de parties à $p+1$ éléments de E en distinguant celles qui contiennent a et celles qui ne contiennent pas a.

⋆ Formule du binôme de Newton : Dans le développement du produit $(a+b)^n$, chacun des 2^n termes est un mot formé de n lettres : k lettres a et $n-k$ lettres b, pour k variant de 0 à n. Pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, il y a exactement $\binom{n}{k}$ mots de n lettres s'écrivant avec k lettres a et $n-k$ lettres b.

Théorème 18 (Cardinal de $\mathcal{P}(E)$)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Esquisses de preuves :

⋆ Première méthode : On écrit $\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$, où $\mathcal{P}_k(E)$ désigne l'ensemble des parties à k éléments de E, on passe au cardinal puis on conclut avec la formule du binôme de Newton.

⋆ Seconde méthode : On montre que l'application $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$ définie par : $\forall A \in \mathcal{P}(E), \varphi(A) = 1_A$ est une bijection.

⋆ Troisième méthode : On raisonne par récurrence. Pour l'hérédité, étant donné un ensemble fini E de cardinal $n+1$, on fixe un élément a de E et on compte le nombre de parties de E en distinguant celles qui contiennent a et celles qui ne contiennent pas a.

8.6 Vocabulaire associé à une expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prédire le résultat. On pourra penser au lancer d'une pièce de monnaie ou d'un dé ou encore au tirage d'une boule dans une urne.
L'univers associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des issues de cette dernière. Il est traditionnellement noté Ω. Un élément ω de Ω est un *aléa*, une *issue*, une *éventualité*, un *résultat possible*.
Dans tout ce cours, Ω sera un univers *fini*. Autrement dit, on ne modélisera que des expériences ayant un nombre fini de résultats possibles.
On précise à présent le vocabulaire que nous utiliserons tout au long de ce chapitre.

Soit Ω un univers fini.
- Un événement est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Un événement élémentaire est un singleton, élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Ω est l'événement certain.
- $\emptyset$ est l'événement impossible.

Soit $(A,B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$. A l'aide des opérations ensemblistes, on peut construire de nouveaux événements à partir de A et de B.
L'événement contraire de l'événement A, noté $\overline{A}$, est $C_\Omega(A)$.
L'événement « A ou B » est l'événement $A \cup B$.
L'événement « A et B » est l'événement $A \cap B$.
L'événement A *implique* l'événement B si et seulement si $A \subset B$.
Les événements A et B sont *incompatibles* ou disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 19 (Système complet d'événements, partition)

Soit Ω un univers fini. Soient I un ensemble fini non vide d'indices puis $(A_i)_{i\in I} \in (\mathcal{P}(\Omega))^I$.
- $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in I^2, (i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset) \quad \text{et} \quad \bigcup_{i\in I} A_i = \Omega.$$

- $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω si et seulement si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements tel que $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$.

Remarques :
- Un exemple évident de système complet d'évènements est $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$.
- Pour tout événement A, $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements couramment utilisé.

8.7 Espaces probabilisés finis

Etant donné un univers fini, le but de cette partie est de définir ce qu'est une probabilité et d'étudier ses principales propriétés.

Définition 20 (Probabilité, espace probabilisé fini)

Soit Ω un univers fini. Une probabilité sur Ω est une application $P : \Omega \to [0,1]$ telle que :
• $P(\Omega) = 1$,
• $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, (A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B))$. (additivité de P)
Le couple (Ω, P) forme un espace probabilisé fini.

Remarque : Si A est un événement, « $P(A)$ mesure la chance que A se réalise ». Plus $P(A)$ est proche de 1, plus A a de chance de se réaliser tandis que, plus $P(A)$ est proche de 0, moins A a de chance de se réaliser.

Proposition 21 (Propriétés de calcul des probabilités)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2) $P(\emptyset) = 0$.

3) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, (A \subset B \implies P(B \backslash A) = P(B) - P(A))$.

4) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, (A \subset B \implies P(A) \leq P(B))$. ($P$ est croissante.)

5) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

6) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Remarques :
• Il faut savoir refaire rapidement les preuves des six points précédents.
• On peut généraliser par récurrence la propriété d'additivité d'une probabilité ainsi que la dernière inégalité au cas de $n \geq 2$ événements.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 2$ événements. Alors,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k). \quad \textit{(Inégalité de Boole)}$$

De plus, si $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints, l'inégalité précédente est une égalité :

$$P\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k). \quad \textit{(additivité finie de } P\textit{)}$$

Proposition 22 (Calcul de la probabilité d'un évènement à l'aide des événéments élémentaires)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Alors,

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

Remarques :
• Pour démontrer l'égalité précédente, on écrit simplement $A = \bigsqcup_{\omega \in A} \{\omega\}$. Ainsi, *pour calculer la probabilité d'un événement, on commence par le décrire à l'aide des événements élémentaires.*

• Cette proposition exprime en particulier qu'une probabilité est parfaitement connue dès qu'on connaît ses valeurs sur les événements élémentaires.

Appliquons le résultat de la proposition précédente à Ω. On obtient :

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}).$$

La famille $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ est donc une famille de réels positifs dont la somme vaut 1. On dit que $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ définit une distribution de probabilité. Le théorème qui suit établit la réciproque.

Théorème 23 (Détermination d'une probabilité à l'aide des événements élémentaires)

Soit Ω un univers fini non vide de cardinal $n \geq 1$. On écrit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ où $\forall i \neq j, \omega_i \neq \omega_j$.

Alors, pour tout $(p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, il existe une unique probabilité P sur Ω telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], P(\{\omega_k\}) = p_k.$$

Cette dernière est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

Remarque : Ce théorème peut être utilisé en exercice pour justifier l'existence d'une probabilité.
Etant donnés Ω un univers fini et $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de réels indexée par Ω, $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ définit une distribution de probabilité sur Ω (en posant $P(\{\omega\}) = p_\omega$) si et seulement si :

$$\forall \omega \in \Omega, p_\omega \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

8.8 Lien entre probabilité uniforme et dénombrement

Tout univers fini non vide Ω peut être muni d'une probabilité particulière, appelée probabilité uniforme, qui permet d'établir un lien avec la notion de dénombrement.

Définition 24 (Probabilité uniforme définie à l'aide des événements élémentaires)

Soit Ω un univers fini non vide. La probabilité uniforme sur Ω est la probabilité $P : \Omega \to [0, 1]$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}.$$

Elle vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Remarques :
• L'existence d'une telle probabilité est garantie par le théorème de la partie précédente.
• Les événements élémentaires ont ici tous la même probabilité ; on dit qu'ils sont équiprobables.
• On réécrit habituellement l'égalité précédente sous la forme suivante :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Autrement dit, *le calcul de probabilités dans le cas uniforme se ramène toujours à un problème de dénombrement.*

8.9 Probabilité conditionnelle ; les trois formules essentielles

On fixe (Ω, P) un espace probabilisé fini. On dispose donc d'une probabilité P sur l'univers fini Ω. Pour tout événement A tel que $P(A) > 0$, on peut construire une nouvelle probabilité sur Ω, appelée probabilité conditionnelle sachant A. Cette probabilité associe à un événement B le nombre $P_A(B)$ qui mesure la chance que B se réalise sachant que A s'est produit.

Définition 25 (Probabilité conditionnelle)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini puis A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, la probabilité conditionnelle de B sachant A, notée $P_A(B)$ (ou encore $P(B|A)$), est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Proposition 26 (La probabilité conditionnelle est une probabilité.)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini puis A un événement tel que $P(A) > 0$.
L'application $P_A : \Omega \to [0, 1]$ est une probabilité sur Ω.

Remarque : D'après la proposition précédente, on peut appliquer tous les résultats de la seconde section à P_A.

On étudie à présent les théorèmes-phares permettant le calcul de probabilités. Ils sont au nombre de trois : la formule des probabilités composées, la formule des probabilités totales et la formule de Bayes. Il faut *connaître leur énoncé*, *savoir les démontrer* et *savoir les utiliser* en exercices.

Si A est un événement de probabilité non nulle et B est un événement quelconque, on peut exprimer $P(A \cap B)$ à l'aide de la probabilité conditionnelle de B sachant A : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. La formule des probabilités composées généralise cette égalité.

Théorème 27 (Formule des probabilités composées)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini puis $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 2$ événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times P_{A_1}(A_2) \times P(A_1).$$

Remarque : La formule des probabilités composées fait apparaître un produit dont chaque terme est la probabilité d'un A_k, $1 \leq k \leq n$, sachant l'intersection des événements qui le précèdent. Elle est couramment utilisée lors des exercices portant sur des tirages successifs *sans remise* de boules dans une urne.

Théorème 28 (Formule des probabilités totales)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini puis $(A_1, \ldots, A_n)$, $n \geq 2$, un système complet d'événements tels que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$. Alors,

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B).$$

Remarques :

• Il est essentiel de savoir refaire la preuve de la formule des probabilités totales.
On écrit $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \bigsqcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$ qui nous conduit à :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k).$$

Il suffit alors d'écrire la définition de la probabilité conditionnelle pour conclure.
• On applique souvent ce théorème au système complet d'événements $(A, \overline{A})$ dès lors que $0 < P(A) < 1$.

Théorème 29 (Formule de Bayes)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini puis $(A_1, \dots, A_n)$, $n \geq 2$, un système complet d'événements tels que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$, et B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], P_B(A_k) = \frac{P(A_k) \times P_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P_{A_i}(B)}.$$

Remarques :

• A nouveau, il est important de safoir refaire la preuve de ce résultat. On commence par écrire la définition de la probabilité conditionnelle $P_B(A_k)$. On réécrit ensuite le numérateur $P(A_k \cap B)$ à l'aide de la probabilité conditionnelle $P_{A_k}(B)$ et on utilise la formule des probabilités totales pour écrire $P(B)$ sous la forme de la somme cherchée.
• On applique souvent ce théorème au système complet d'événements $(A, \overline{A})$ dès lors que $0 < P(A) < 1$.
• La formule de Bayes est également appelée « formule de probabilité des causes ». Elle apparaît couramment lors des *tests de dépistage* d'une certaine maladie. On peut par exemple calculer la probabilité qu'un patient ayant un test positif (la conséquence) est malade (la cause).

8.10 Evénements indépendants

On termine ce chapitre en définissant la notion d'indépendance pour deux événements ou plus.

Définition 30 (Couple d'événements indépendants)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini puis A et B deux événements.
Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

On fait le lien entre indépendance et probabilité conditionnelle.

Proposition 31 (Indépendance et probabilité conditionnelle)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini puis A et B deux événements tels que $P(A) > 0$.
Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Remarques :

• La proposition précédente éclaire la notion d'indépendance (dans le cas où $P(A) > 0$) : les événements A et B sont indépendants si et seulement si *savoir que l'événement A est réalisé n'apporte aucune information sur la probabilité de B.*

• Lorsqu'on demande d'étudier l'indépendance de deux événements en exercice, on revient *systématiquement* à la définition. On invoque en aucun cas une quelconque intuition que les événements n'auraient pas de lien entre eux car l'intuition peut bien souvent s'avérer trompeuse.
• La notion d'événements indépendants n'a *aucun rapport* avec la notion d'événements incompatibles. Par exemple, deux événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont jamais indépendants.

La définition de l'indépendance se généralise au cas de $n \geq 2$ événements à travers l'indépendance mutuelle qui est une notion plus fine que l'indépendance deux à deux.

Définition 32 (Famille finie d'événements indépendants)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini puis $A_1, \dots, A_n$, $n \geq 2$ événements.
• $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)).$$

• $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants (ou simplement indépendants) si et seulement si :

$$\forall I \in \mathcal{P}_f([\![1,n]\!]) \backslash \{\emptyset\}, P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Remarque : Par définition, A_1, A_2 et A_3 sont indépendants si et seulement si $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3)$ et $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$.

Etudions à présent les différences entre ces deux notions.

Proposition 33 (L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini puis $A_1, \dots, A_n$, $n \geq 2$ événements.
Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, alors $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants.

Remarque : Ce résultat est clair. Etant donné $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, il suffit d'appliquer la définition de l'indépendance mutuelle avec la partie finie : $\{i,j\}$.
En revanche, la réciproque de la proposition précédente est fausse. On peut par exemple considérer $\Omega = \{1,2,3,4\}$ muni de la probabilité uniforme et les événements $A = \{2,3\}$, $B = \{1,3\}$ et $C = \{1,2\}$. A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants puisque $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$.

Notre dernier résultat porte sur la stabilité de l'indépendance relativement au passage au complémentaire.

Théorème 34 (Stabilité de l'indépendance par passage au complémentaire)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini puis $A_1, \dots, A_n$, $n \geq 2$ événements.
Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, alors $B_1, \dots, B_n$ sont indépendants où $\forall k \in [\![1,n]\!], B_k = A_k$ ou $\overline{A_k}$.

Remarque : En particulier, si A et B sont deux événements indépendants, alors :
• A et $\overline{B}$ sont indépendants,
• $\overline{A}$ et B sont indépendants,
• $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.