Chapitre 8

Compléments d'intégration ($2^{\text{ième}}$ partie)

Notre objectif ici est de généraliser la notion d'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, à un intervalle non borné. On se concentrera sur trois types d'intervalles : $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ et $]-\infty,+\infty[$, a et b étant des réels. Ce chapitre est purement calculatoire et a pour seule fonction de permettre l'introduction des variables aléatoires à densité au Chapitre 9.

8.1 Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$, a réel

Définition 1 (Intégrale généralisée d'une fonction continue sur $[a,+\infty[$)

Soient a un réel et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Dans ce cas, cette limite est notée :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

On retiendra qu'en cas d'existence, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque : Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

⋆ 1^{ier} exemple :

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge. Soit $x\geq 2$.

$\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^x = -\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$.

⋆ $2^{\text{ième}}$ exemple :

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge. Soit $x\geq 0$.

$\displaystyle\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x}+1$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -e^{-x}+1 = 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.

8.2 Intégrales généralisées sur $]-\infty, b]$, b réel

Définition 2 (Intégrale généralisée d'une fonction continue sur $]-\infty, b]$)

Soient b un réel et f une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty, b]$.
On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$. Dans ce cas, cette limite est notée :

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t.$$

On retiendra qu'en cas d'existence, $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque : Si l'intégrale $\displaystyle\int_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers $-\infty$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

⋆ 1^{ier} exemple :

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^{2t}\mathrm{d}t$ converge. Soit $x \leq 1$.

$\displaystyle\int_{x}^{1} e^{2t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_{x}^{1} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{2x}}{2}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^2}{2} - \frac{e^{2x}}{2} = \frac{e^2}{2}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^{2t}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^{2t}\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2}$.

⋆ $2^{\text{ième}}$ exemple :

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\mathrm{d}t$ diverge. Soit $x \leq 0$.

$\displaystyle\int_{x}^{0} e^{-t}\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_{x}^{0} = -1 + e^{-x}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -1 + e^{-x} = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\mathrm{d}t$ diverge.

8.3 Intégrales généralisées sur $]-\infty, +\infty[$

Définition 3 (Intégrale généralisée d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge lorsqu'on peut trouver un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas, par définition,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarques :

- S'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t$ ou l'intégrale $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.
- On prendra souvent $c = 0$.

⋆ Etude d'un exemple :

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t$ converge.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^3}$.

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = -\dfrac{1}{2(1+e^t)^2}$.

On observe que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F'(t) = f(t)$. Autrement dit, F est une primitive de f.

J'étudie à présent la nature des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t$.

• Convergence de la première intégrale :

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t$ converge. Soit $x \geq 0$.

$\displaystyle\int_0^{x} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_0^x = F(x) - F(0) = -\frac{1}{2(1+e^x)^2} + \frac{1}{8}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2(1+e^x)^2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{8}$.

• Convergence de la deuxième intégrale :

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t$ converge. Soit $x \leq 0$.

$\displaystyle\int_x^{0} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t = \int_x^0 f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_x^0 = F(0) - F(x) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+e^x)^2}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+e^x)^2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t = \frac{3}{8}$.

• Conclusion :

Finalement, on a montré que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$