Chapitre 7

Limites et continuité

Dans tout ce chapitre, D désigne une partie de $\mathbb{R}$ qui est une réunion finie d'intervalles non vides et non réduits à un singleton et I est un intervalle non vide et non réduit à un singleton. On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

7.1 Limite d'une fonction en un point

7.1.1 Limite d'une fonction en un réel

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est un point *adhérent* à A si et seulement si pour tout $r > 0$, $]a - r, a + r[\cap A \neq \emptyset$.

Définition 1 (Limite d'une fonction en un réel)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D.
• Soit $l \in \mathbb{R}$. $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

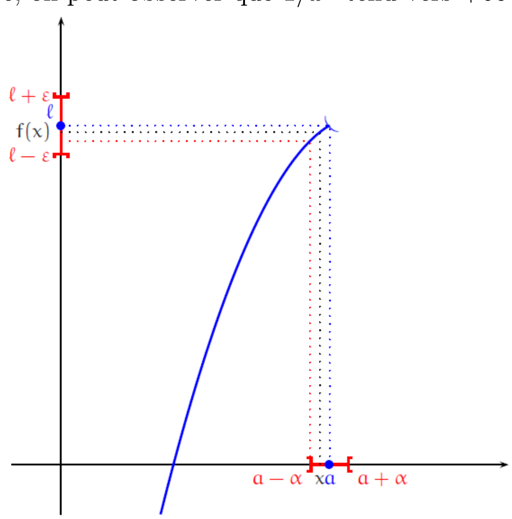
• $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si et seulement si :

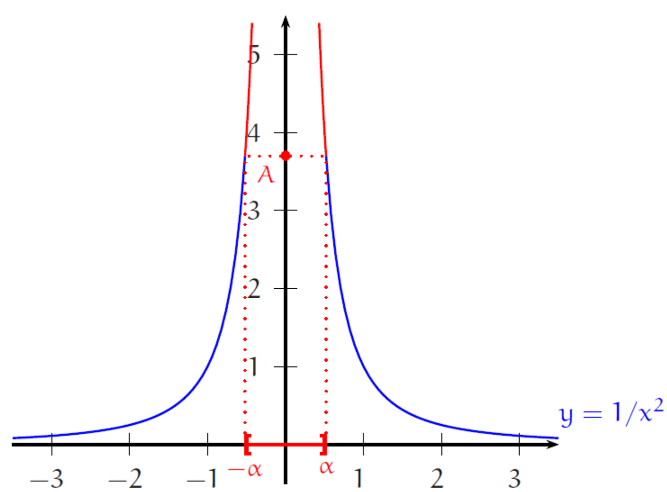
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \alpha \implies f(x) \geq A).$$

• $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \alpha \implies f(x) \leq A).$$

⋆ A gauche ci-dessous, on a représenté une fonction f admettant pour limite le réel l quand x tend vers a.
⋆ A droite, on peut observer que $1/x^2$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.





Remarques :
1) On peut remplacer chacune des inégalités larges de la définition précédente par une inégalité stricte. Cela sera également le cas pour toutes les définitions de limites à venir.
2) Au second (resp. troisième) point, on dit aussi que « f diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers a ».
3) Lorsqu'aucun des trois points précédents n'est vérifié, on dit que f *n'admet pas de limite en* a.

Proposition 2 (Unicité de la limite)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soient $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D et $(l_1, l_2) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$.
Si $f(x)$ tend vers l_1 quand x tend vers a et si $f(x)$ tend vers l_2 quand x tend vers a, alors $l_1 = l_2$.

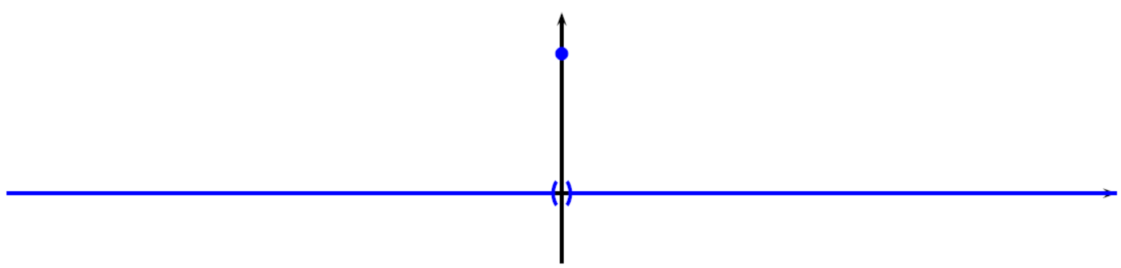
Remarque : La proposition précédente assure qu'il y a unicité de la limite de f en a. On utilise les notations $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, $\lim\limits_{a} f = l$ et $f(x) \underset{x\to a}{\to} l$ pour exprimer que $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers a. Attention, on ne peut s'en servir que lorsque l'existence de la limite est avérée ! On ne peut donc pas commencer un calcul en écrivant une succession d'égalités du type : $\lim \ldots = \lim \ldots$

Théorème 3 (Si f est définie en a et a une limite en a, alors $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$.
Si f admet une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarque : Insistons sur ce résultat. Si f possède une limite en un élément a de *son ensemble de définition*, alors la valeur de cette limite est obligatoirement $f(a)$.

La définition de la limite en un point $a \in D$ est très exigeante. On montre par exemple que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ représentée ci-dessous et définie par : $\forall x \neq 0, f(x) = 0$ et $f(0) = 1$ n'admet pas de limite en 0.



On aimerait néanmoins essayer d'exprimer que, d'une certaine manière, tant qu'on ne regarde pas ce qui se passe en 0, f admet quand même une limite. On dit que f admet une *limite épointée* en 0 (égale à 0). On précise cette notion dans l'encadré suivant.

Définition 4 (Limite épointée)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D.

• Soit $l \in \mathbb{R}$. $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a en restant différent de a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (0 < |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

• $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a en restant différent de a si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (0 < |x - a| \leq \alpha \implies f(x) \geq A).$$

• $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a en restant différent de a si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (0 < |x - a| \leq \alpha \implies f(x) \leq A).$$

Remarques :

• Dans le cas de la limite épointée, x ne peut pas être égal à a ($|x-a|>0$).

• Le premier point exprime que la restriction de f à $D\backslash\{a\}$, notée $f_{|D\backslash\{a\}}$ tend vers l quand x tend vers a, le second point que $f_{|D\backslash\{a\}}$ diverge vers $+\infty$ quand x tend vers a et le troisième point que $f_{|D\backslash\{a\}}$ diverge vers $-\infty$ quand x tend vers a.

• En tant que limite de restriction, la limite épointée est *unique*, ce qui permet de noter $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)=l$ lorsque $f(x)$ tend vers $l\in\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers a en restant différent de a.

• Les notions de limite et de limite épointée sont les mêmes lorsque $a\notin D$ (dans ce cas, l peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$). On écrira par exemple indifféremment $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$. Par contre, si $a\in D$, elles diffèrent. L'existence d'une limite en a implique l'existence d'une limite épointée (de même valeur) en a mais la réciproque est fausse. De plus, en cas d'existence, la limite épointée d'une fonction f en $a\in D$ peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$ ce qui n'est pas le cas de la limite « tout court » qui ne peut valoir que $f(a)$.

On définit à présent les notions de limites à gauche et à droite.

Définition 5 (Limite à gauche)

Soient $f:D\to\mathbb{R}$ une fonction et $a\in\mathbb{R}$. On suppose que a est adhérent à $D\cap]-\infty,a[$.

• Soit $l\in\mathbb{R}$. $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a par valeurs inférieures en restant différent de a si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D,(a-\alpha\leq x<a\implies|f(x)-l|\leq\varepsilon).$$

• $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieures en restant différent de a si et seulement si :

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists\alpha>0,\forall x\in D,(a-\alpha\leq x<a\implies f(x)\geq A).$$

• $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieures en restant différent de a si et seulement si :

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists\alpha>0,\forall x\in D,(a-\alpha\leq x<a\implies f(x)\leq A).$$

Remarques :

• Le premier point exprime que la restriction de f à $D\cap]-\infty,a[$, notée $f_{|D\cap]-\infty,a[}$ tend vers l quand x tend vers a, le second point que $f_{|D\cap]-\infty,a[}$ diverge vers $+\infty$ quand x tend vers a et le troisième point que $f_{|D\cap]-\infty,a[}$ diverge vers $-\infty$ quand x tend vers a. En tant que limite de restriction, la limite à gauche est *unique*. On notera alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=l$ ou encore $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ dans le premier cas, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty$ ou encore $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ dans le second cas et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=-\infty$ ou encore $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ dans le troisième cas.

• On a par exemple $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\lfloor x\rfloor=0$. En revanche, $\lfloor\ \rfloor$ n'admet pas de limite (ni-même de limite épointée) en 1.

Définition 6 (Limite à droite)

Soient $f:D\to\mathbb{R}$ une fonction et $a\in\mathbb{R}$. On suppose que a est adhérent à $D\cap]a,+\infty[$.

• Soit $l\in\mathbb{R}$. $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a par valeurs supérieures en restant différent de a si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D,(a<x\leq a+\alpha\implies|f(x)-l|\leq\varepsilon).$$

• $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures en restant différent de a si et seulement si :

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists\alpha>0,\forall x\in D,(a<x\leq a+\alpha\implies f(x)\geq A).$$

• $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures en restant différent de a si et seulement si :

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists\alpha>0,\forall x\in D,(a<x\leq a+\alpha\implies f(x)\leq A).$$

Remarques :

• Le premier point exprime que la restriction de f à $D\cap]a,+\infty[$, notée $f_{|D\cap]a,+\infty[}$ tend vers l quand x tend vers a, le second point que $f_{|D\cap]a,+\infty[}$ diverge vers $+\infty$ quand x tend vers a et le troisième point que $f_{|D\cap]a,+\infty[}$ diverge vers $-\infty$ quand x tend vers a. En tant que limite de restriction, la limite à droite est *unique*. On notera alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=l$ ou encore $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ dans le premier cas, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=+\infty$ ou encore $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ dans le second cas et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=-\infty$ ou encore $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ dans le troisième cas.

• Considérons de nouveau la fonction partie entière. Ici, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} \lfloor x\rfloor=1$. On observe que cette limite est égale à $\lfloor 1\rfloor=1$. On dira au chapitre suivant que la fonction partie entière est continue à droite en 1.

On fait maintenant le lien entre les notions de limite, de limite à gauche et de limite à droite.

Théorème 7 (Lien entre limite, limite à gauche et limite à droite)

Soient $f:D\to\mathbb{R}$ une fonction et $a\in\mathbb{R}$. On suppose que a est adhérent à $D\cap]-\infty,a[$ et à $D\cap]a,+\infty[$.

• 1ier cas : Supposons que $a\notin D$. Alors, f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à gauche en a, une limite à droite en a et que ces deux limites sont égales. Dans ce cas,

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a} f(x).$$

• 2ième cas : Supposons que $a\in D$. Alors, f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à gauche en a, une limite à droite en a et que ces deux limites sont égales à $f(a)$. Dans ce cas,

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Remarques :

• On peut remplacer « la limite en a » par « la limite épointée en a » dans le premier cas puisque $a\notin D$.

• Comme $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

7.1.2 Limite d'une fonction en $+\infty$

On distingue trois cas : lorsque la limite est réelle, lorsque la limite est égale à $+\infty$ et lorsque la limite est égale à $-\infty$.

Définition 8 (Limite d'une fonction en $+\infty$)

Soient $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ puis I un intervalle de la forme $]a,+\infty[$. Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction.

• Soit $l\in\mathbb{R}$. $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0,\exists A\in\mathbb{R},\forall x\in I,(x\geq A\implies |f(x)-l|\leq\varepsilon).$$

• $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists B\in\mathbb{R},\forall x\in I,(x\geq B\implies f(x)\geq A).$$

• $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists B\in\mathbb{R},\forall x\in I,(x\geq B\implies f(x)\leq A).$$

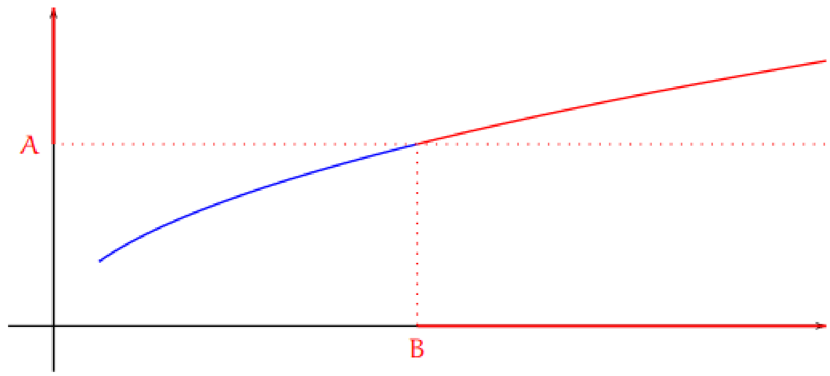
Remarques :

• Il y a unicité de la limite en $+\infty$, ce qui légitime l'utilisation des trois notations suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty.$$

• Lorsqu'aucun des trois points précédents n'est vérifié, on dit que f *n'admet pas de limite en* $+\infty$.

Voici le graphe d'une fonction admettant $+\infty$ comme limite en $+\infty$.



7.1.3 Limite d'une fonction en $-\infty$

On distingue trois cas : lorsque la limite est réelle, lorsque la limite est égale à $+\infty$ et lorsque la limite est égale à $-\infty$.

Définition 9 (Limite d'une fonction en $-\infty$)

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ puis I un intervalle de la forme $]-\infty, a[$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

• Soit $l \in \mathbb{R}$. $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

• $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq B \implies f(x) \geq A).$$

• $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq B \implies f(x) \leq A).$$

Remarques :

• Il y a unicité de la limite en $-\infty$, ce qui légitime l'utilisation des trois notations suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

• Lorsqu'aucun des trois points précédents n'est vérifié, on dit que f *n'admet pas de limite en* $-\infty$.

7.2 Opérations sur les limites

On résume dans trois tableaux les théorèmes opératoires portant sur les limites de fonctions.
Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles dont le comportement asymptotique est décrit ci-dessous.

• Somme :

f(x) tend vers	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g(x) tend vers	ℓ'	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
f(x) + g(x) tend vers	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

• Produit :

f(x) tend vers	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
g(x) tend vers	ℓ'	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
f(x) × g(x) tend vers	$\ell\ell'$	$\text{sgn}(\ell) \times +\infty$	$\text{sgn}(\ell) \times -\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

• Quotient :

f(x) tend vers	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
g(x) tend vers	$\ell' \neq 0$	0^+	0^+	0^-	0^-	$\ell > 0$	$\ell < 0$
f(x)/g(x) tend vers	ℓ/ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

f(x) tend vers	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
g(x) tend vers	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$\pm\infty$
f(x)/g(x) tend vers	$-\infty$	$+\infty$	?	?

Comme le montrent les tableaux précédents, on ne peut pas toujours conclure quant au comportement de la fonction construite à partir de f et de g. Il y a quatre formes indéterminées auxquelles on ajoute une cinquième :

$$(+\infty) + (-\infty), \quad \infty \times 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{et} \quad 1^\infty.$$

Comme $\frac{1}{\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = \infty$, il n'y a en fait que trois formes indéterminées : $(+\infty) + (-\infty)$, $\infty \times 0$ et 1^∞. Dans les cas précédents, tout peut arriver : convergence vers un réel, divergence vers l'infini ou absence de limite.

Théorème 10 (Composition de limites)

Soit $(a, b, l) \in (\overline{\mathbb{R}})^3$. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles. On suppose que :
• f est à valeurs dans le domaine de définition de g,
• $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$,
• $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$.
Alors, la fonction $g \circ f$ admet une limite quand x tend vers a. Précisément, $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = l$.

7.3 Théorèmes sur les limites

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On commence par définir ce qu'est un voisinage de a (dans $\overline{\mathbb{R}}$). Soit V une partie de $\overline{\mathbb{R}}$. On distingue trois cas.

- Cas où $a \in \mathbb{R}$: V est un voisinage de a si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\subset V$.
- Cas où $a = +\infty$: V est un voisinage de a si et seulement si il existe $A > 0$ tel que $]A, +\infty] \subset V$.
- Cas où $a = -\infty$: V est un voisinage de a si et seulement si il existe $A < 0$ tel que $[-\infty, A[\subset V$.

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a. On dit que a est *adhérent* à D (dans $\overline{\mathbb{R}}$) si et seulement si pour tout $V_a \in \mathcal{V}(a)$, $D \cap V_a \neq \emptyset$. On est maintenant en mesure d'énoncer dans un cadre unifié les différents théorèmes relatifs aux limites.

7.3.1 Limites et inégalités

Proposition 11 (Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.
Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a. Autrement dit, il existe $M \geq 0$ et V_a un voisinage de a tel que, pour tout $x \in V_a \cap D$, $|f(x)| \leq M$.

Le théorème suivant exprime que si l'on sait comparer deux fonctions au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, admettant chacune une limite finie en a, alors on sait comparer ces limites.

Théorème 12 (Passage à la limite dans les inégalités)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.
On suppose que :
• il existe V_a un voisinage de a tel que, pour tout $x \in V_a \cap D, f(x) \leq g(x)$,
• il existe $l_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)$ tend vers l_1 quand x tend vers a,
• il existe $l_2 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x)$ tend vers l_2 quand x tend vers a.
Alors,

$$l_1 \leq l_2.$$

Remarque : Attention, si l'on change la première hypothèse en remplaçant l'inégalité large par une inégalité stricte, rien n'assure que $l_1 < l_2$.

La proposition suivante nous permet de connaître le signe de la fonction f au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ à partir de sa limite en a (en convenant bien sûr que $+\infty$ est strictement positif et $-\infty$ est strictement négatif).

Proposition 13 (Une fonction est du signe de sa limite au voisinage de cette dernière.)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.
Si $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{0\}$ quand x tend vers a, alors il existe V_a un voisinage de a tel que, pour tout $x \in V_a \cap D$, $f(x)$ est du signe de l.

Remarque : On déduit immédiatement de la proposition précédente que si f et g sont deux fonctions définies sur D, à valeurs réelles, qui ont pour limites respectives l_1 et l_2 en a avec $l_1 < l_2$, alors il existe V_a un voisinage de a tel que, pour tout $x \in V_a \cap D, f(x) < g(x)$.

Théorème 14 (Théorème des gendarmes)

Soient f, g et h trois fonctions définies sur D, à valeurs réelles. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $l \in \mathbb{R}$.
On suppose que :
• il existe V_a un voisinage de a tel que, pour tout $x \in V_a \cap D, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,
• $g(x)$ tend vers l quand x tend vers a,
• $h(x)$ tend vers l quand x tend vers a.
Alors, f admet une limite en a et

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Remarque : Il faut bien garder à l'esprit que le théorème des gendarmes possède deux conclusions : l'existence de la limite de f et la valeur de cette dernière.

Proposition 15 (Un corollaire du théorème des gendarmes)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $l \in \mathbb{R}$.
On suppose que :
• il existe V_a un voisinage de a tel que, pour tout $x \in V_a \cap D, |f(x) - l| \leq g(x)$,
• $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a.
Alors, f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Remarque : On se sert souvent de l'énoncé précédent avec $l = 0$. Pour montrer qu'une fonction tend vers 0 quand x tend vers a, il suffit de majorer sa valeur absolue par une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers a.

On énonce deux théorèmes de comparaison qui traitent de fonctions admettant en a des limites infinies.

Théorème 16 (Théorème de minoration)

Soient f et g deux fonctions définies sur D, à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.
On suppose que :
• il existe V_a un voisinage de a tel que, pour tout $x \in V_a \cap D, f(x) \leq g(x)$,
• $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a.
Alors, $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a.

Théorème 17 (Théorème de majoration)

Soient f et g deux fonctions définies sur D, à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.
On suppose que :
• il existe V_a un voisinage de a tel que, pour tout $x \in V_a \cap D, f(x) \leq g(x)$,
• $g(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a.
Alors, $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a.

7.3.2 Le théorème de la limite monotone

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On introduit la notation $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Théorème 18 (Théorème de la limite monotone)

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $I =]a, b[$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur I.

• Pour tout $x_0 \in I$, $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent dans $\mathbb{R}$. De plus, $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$.

• $\forall (x_0, x_1) \in I^2, (x_0 < x_1 \implies f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) \leq f(x_1^-) \leq f(x_1) \leq f(x_1^+))$.

• f admet une limite quand x tend vers a qui est un réel si f est minorée et $-\infty$ sinon.

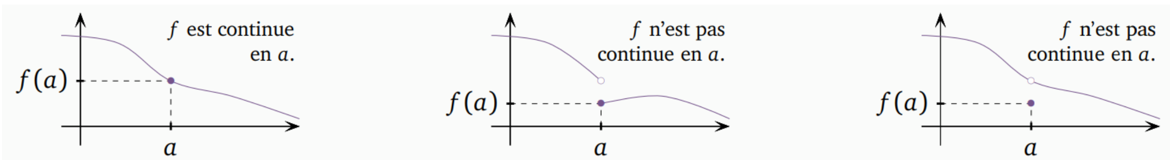
• f admet une limite quand x tend vers b qui est un réel si f est majorée et $+\infty$ sinon.

Remarque : Le théorème précédent assure qu'une fonction croissante admet des limites à gauche et à droite en tout point intérieur à son intervalle de définition et admet aussi des limites finies ou infinies à ses bornes. On dispose d'un résultat analogue concernant les fonctions décroissantes. Il suffit de changer le sens de toutes les inégalités.

7.4 Continuité en un point

Définition 19 (Continuité en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$.
f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



Remarques :

• On peut réécrire la définition de la continuité avec des quantificateurs de la manière suivante.

$$f \text{ est continue en } a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon).$$

• Comme $a \in I$, on sait que si f admet une limite en a, alors cette dernière vaut nécessairement $f(a)$. Ainsi, f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a.

Proposition 20 (Caractérisation de la continuité en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$.
f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

Etudions la continuité en 0 de la fonction $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = -\lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = -1 = f(0).$$

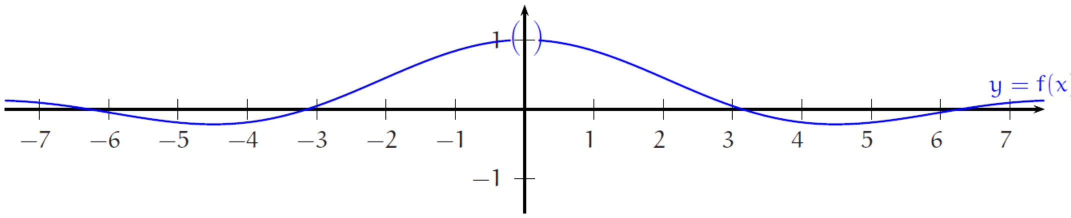
Donc f est continue en 0.

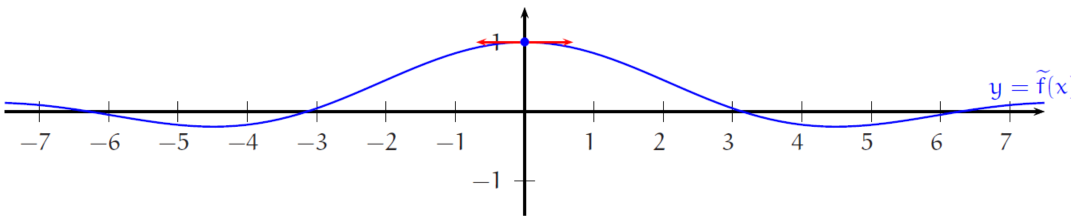
Etant donnés $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$, on se demande à quelle condition f se prolonge en une fonction continue en a.

Théorème 21 (Prolongement par continuité en un point)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f admet une limite réelle l quand x tend vers a, alors il existe une unique fonction notée $\tilde{f}$ telle que :
• $\tilde{f}$ est définie sur I,
• $\tilde{f}_{|I \backslash \{a\}} = f$,
• $\tilde{f}$ est continue en a.
La fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ est définie par : $\forall x \in I, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in I \backslash \{a\} \\ l & \text{si} \quad x = a \end{cases}$ et s'appelle le prolongement par continuité de f en a.

Montrons que la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0.
On sait que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$. Donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 1$.





De même que pour les limites, on définit les notions de continuité à gauche et à droite.

Définition 22 (Continuité à gauche en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$ tel que a n'est pas la borne gauche de I.
f est continue à gauche en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Remarques :

- On peut réécrire la définition de la continuité à gauche avec des quantificateurs de la manière suivante.

$$f \text{ est continue à gauche en } a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (a - \eta \leq x < a \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon).$$

- f est continue à gauche en a si et seulement si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$, notée $f_{|I \cap]-\infty,a[}$ a pour limite $f(a)$ quand x tend vers a.

Définition 23 (Continuité à droite en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$ tel que a n'est pas la borne droite de I.
f est continue à droite en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

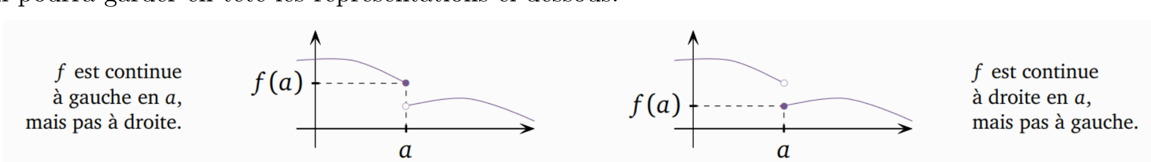
Remarques :

- On peut réécrire la définition de la continuité à droite avec des quantificateurs de la manière suivante.

$$f \text{ est continue à droite en } a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (a < x \leq a + \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon).$$

- f est continue à droite en a si et seulement si la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$, notée $f_{|I \cap]a,+\infty[}$ a pour limite $f(a)$ quand x tend vers a.

On pourra garder en tête les représentations ci-dessous.



On fait à présent le lien entre la continuité et les continuités à gauche et à droite d'une fonction en un point.

Théorème 24 (Lien entre continuité, continuité à gauche et continuité à droite en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit $a \in I$ tel que a n'est pas une borne de I.

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow f \text{ est continue à gauche et à droite en } a \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Proposition 25 (Opérations sur les fonctions continues en un point)

Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I, à valeurs réelles. Soit $a \in I$.
• Si f et g sont continues en a, alors pour tout $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \beta g$ est continue en a.
• Si f et g sont continues en a, alors la fonction $f \times g$ est continue en a.
• Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$, alors la fonction f/g est continue en a.

Proposition 26 (Composition de fonctions continues en un point)

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J, à valeurs réelles. Soit $a \in I$. On suppose que :
• $f(I) \subset J$,
• f est continue en a,
• g est continue en $f(a)$.
Alors, la fonction $g \circ f$ est continue en a.

7.5 Continuité sur un intervalle

Définition 27 (Continuité d'une fonction sur un intervalle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I.
f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.

Remarques :
• f est continue sur $I \iff \forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$.
• On peut généraliser la définition précédente à une partie D de $\mathbb{R}$ qui est une réunion finie d'intervalles non vides et non réduits à un singleton de la façon naturelle suivante.
f est continue sur D si et seulement si f est continue en tout point de D.
Cette définition n'est pas aussi simple qu'il y paraît. Prenons pour D une réunion de deux intervalles I_1 et I_2 : $D = I_1 \cup I_2$. On pourrait croire que f est continue sur D si et seulement si f est continue sur I_1 et sur I_2. Il n'en est rien. Prenons par exemple $I_1 = [0, 1[$, $I_2 = [1, 2[$ et $f : [0, 2[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in [0, 2[, f(x) = \lfloor x \rfloor$. f est continue sur I_1 et continue sur I_2. Elle est continue à droite en 1 mais non continue en 1 (car non continue à gauche en 1). En revanche, si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, alors une fonction continue sur I_1 et sur I_2 est continue sur $I_1 \cup I_2$.

Proposition 28 (Opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
• Si f et g sont continues sur I, alors pour tout $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \beta g$ est continue sur I.
• Si f et g sont continues sur I, alors la fonction $f \times g$ est continue sur I.
• Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction f/g est continue sur I.

Proposition 29 (Composition de fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J, à valeurs réelles. On suppose que :
• $f(I) \subset J$,
• f est continue sur I,
• g est continue sur J.
Alors, la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Les fonctions issues du catalogue des fonctions usuelles à connaître sont toutes continues.
Un polynôme est continu sur $\mathbb{R}$. Une fraction rationnelle est continue en tout point où son dénominateur ne s'annule pas. Les fonctions puissances $n^{\text{ièmes}}$, racines $n^{\text{ièmes}}$, logarithmes, exponentielles, puissances, sinus, cosinus et tangente sont continues sur leur domaine de définition.

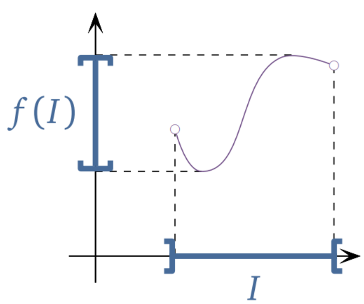
7.6 Les grands théorèmes : TVI et théorème des bornes atteintes

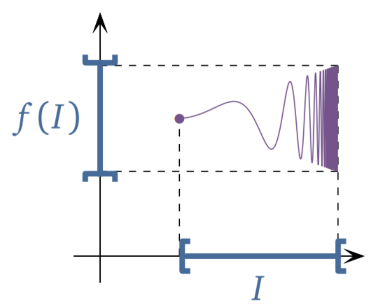
On présente les deux théorèmes majeurs relatifs à la continuité : le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des bornes atteintes.

Théorème 30 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarques :
• On abrège souvent « théorème des valeurs intermédiaires » en TVI.
• Une preuve de ce théorème est basée sur le principe de dichotomie.
• Le théorème précédent se reformule ainsi : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
• Attention, I et $f(I)$ ne sont pas forcément de même nature comme le montrent les représentations graphiques suivantes.





On verra dans la section suivante que lorsque f est de surcroît *strictement monotone*, alors I et $f(I)$ sont de même nature.

En exercices, on utilise majoritairement l'un des deux corollaires du TVI ci-dessous.

Proposition 31 (Premier corollaire du TVI)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I. On suppose qu'il existe deux éléments a et b de I tels que $a < b$ et $f(a)f(b) \leq 0$. Alors, f s'annule au moins une fois sur I entre a et b.

Proposition 32 (Second corollaire du TVI)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Remarques :
• On dispose d'un résultat analogue en échangeant les limites $+\infty$ et $-\infty$.
• On démontre facilement grâce à ce résultat qu'*une fonction polynomiale de degré impair à coefficients réels s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.*

Le deuxième théorème majeur est appelé théorème des bornes atteintes et permet de justifier qu'une fonction continue sur un segment admet un maximum et un minimum.

Théorème 33 (Théorème des bornes atteintes)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur le segment $[a, b]$.
Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors $f([a, b])$ est un segment. Précisément,

$$f([a,b]) = \Big[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)\Big].$$

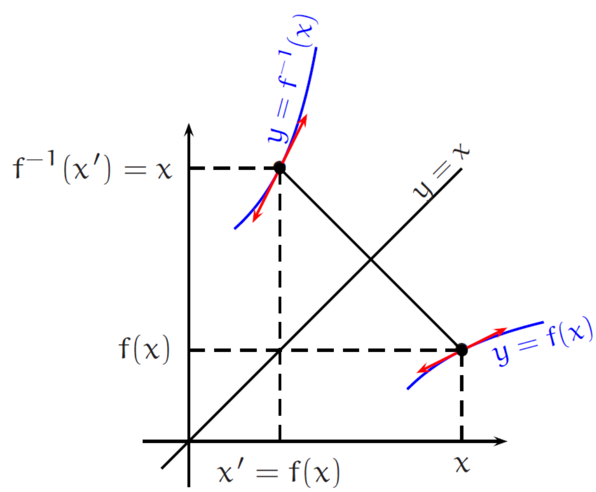
En particulier, il existe $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$ tel que :

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1) \quad \text{et} \quad \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2).$$

Remarque : Le théorème précédent se reformule ainsi : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. En particulier, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

7.7 Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle

L'objectif de cette section est de trouver deux conditions simples à vérifier permettant d'assurer qu'une fonction réalise une bijection. On rappelle que lorsque f est bijective, le graphe de f^{-1} s'obtient par symétrie du graphe de f par rapport à la première bissectrice, la droite d'équation $y = x$.



Théorème 34 (Théorème de la fonction continue strictement monotone sur un intervalle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I.
Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ qui est un intervalle de même nature que I (ouvert, semi-ouvert, fermé). De plus, la réciproque f^{-1} a la même monotonie que f et est continue sur J.

Illustrons ce théorème. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement décroissante sur $[a, b[$. Alors, f réalise une bijection de $[a, b[$ sur $\big] \lim_{x\to b^-} f(x), f(a)\big]$.