

# Chapitre 6

## Variables aléatoires discrètes

On considère l'expérience aléatoire suivante. On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce qu'on obtienne pile. On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécessaires.

- ★ Si l'on obtient directement pile, alors  $X = 1$ .
- ★ Si l'on obtient face puis pile, alors  $X = 2$ .
- ★ Si l'on obtient face, face, pile, alors  $X = 3$ .

En fait,  $X$  peut prendre toutes les valeurs entières non nulles. Précisément, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X = n$  si et seulement si on obtient face lors des  $n - 1$  premiers lancers et pile au  $n^{\text{ième}}$  lancer.

L'objet de ce chapitre est l'étude des variables aléatoires pouvant prendre un nombre infini de valeurs mais que l'on peut énumérer. Les différentes variables aléatoires seront définies sur un ensemble abstrait  $\Omega$  non nécessairement fini représentant l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire, muni d'une probabilité  $P$ , ce qu'on appelle un *espace probabilisé*.

### 6.1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

Commençons par introduire un peu de vocabulaire.

- ★ Une **variable aléatoire**  $X$  est une fonction définie sur  $\Omega$ , à valeur réelles.

#### Définition 1 (Support d'une variable aléatoire)

Soit  $X$  une variable aléatoire. On appelle **support** de  $X$  et on note  $X(\Omega)$  l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .

#### Définition 2 (Variable aléatoire discrète)

Soit  $X$  une variable aléatoire. On dit que  $X$  est une variable aléatoire **discrète** si et seulement si son support  $X(\Omega)$  est un ensemble discret, c'est-à-dire que l'on peut *énumérer* ses éléments.

#### Définition 3 (Variable aléatoire discrète finie, variable aléatoire discrète infinie)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète.

- On dit que  $X$  est une variable aléatoire discrète **finie** si et seulement si son support  $X(\Omega)$  est un ensemble fini. Dans ce cas,  $X(\Omega)$  est de la forme :  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$  avec  $n \geq 1$ .
- On dit que  $X$  est une variable aléatoire discrète **infinie** si et seulement si son support  $X(\Omega)$  est un ensemble infini dont on peut *énumérer* les éléments. Dans ce cas,  $X(\Omega)$  est de la forme :  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

Remarque : On limitera notre étude des variables aléatoires discrètes infinies aux variables aléatoires *positives*.

On peut étendre les définitions portant sur les variables aléatoires discrètes finies aux variables aléatoires discrètes infinies.

#### Définition 4 (Loi de probabilité)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète positive.

Déterminer la loi de  $X$ , c'est décrire  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  et préciser pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(X = x_n)$ .

#### Définition 5 (Fonction de répartition)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète positive.

On appelle fonction de répartition de  $X$  et on note  $F_X$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x).$$

On revient à présent sur la notion de système complet d'événements.

#### Proposition 6 (Un exemple de système complet d'événements)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie *positive*, de support  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

Alors, la famille  $([X = x_n])_{n \in \mathbb{N}}$  constituée des événements  $[X = x_n]$  avec  $n \in \mathbb{N}$  forme un **système complet d'événements**. En particulier,  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1$ .

Pour finir, étant donnée une famille  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels indexée par  $\mathbb{N}$ , on se demande quand est-ce que cette dernière définit la loi probabilité d'une variable aléatoire discrète. La réponse est simple, il faut et il suffit que :

• pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n \geq 0$ ,

• la série de terme général  $p_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ .

Dans ce cas, il existe une variable aléatoire  $X$  dont le support est inclus dans  $\mathbb{N}$  et telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(X = n) = p_n$ .

## 6.2 Espérance d'une variable aléatoire discrète infinie positive

#### Définition 7 (Espérance d'une variable aléatoire discrète infinie)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie *positive*, de support  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

Si la série de terme général  $x_n \times P(X = x_n)$  converge, alors on appelle espérance de  $X$  et on note  $E(X)$  le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \times P(X = x_n).$$

#### Théorème 8 (Formule de transfert)

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète infinie, de support  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  et  $f$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$  à valeurs *positives*.

La variable aléatoire  $f(X)$  admet une espérance si et seulement si la série de terme général  $f(x_n) \times P(X = x_n)$  converge. Dans ce cas,

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \times P(X = x_n).$$

Remarque : On déduit en particulier de ce théorème que  $X^2$  admet une espérance si et seulement si la série de terme général  $x_n^2 \times P(X = x_n)$  converge. Dans ce cas,

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 \times P(X = x_n).$$

### 6.3 Variance d'une variable aléatoire discrète infinie positive

#### Définition 9 (Variance d'une variable aléatoire discrète infinie positive)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie *positive*, de support  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  admettant une espérance. Si la série de terme général  $(x_n - E(X))^2 \times P(X = x_n)$  converge, alors on appelle variance de  $X$  et on note  $V(X)$  le réel défini par :  $V(X) = E((X - E(X))^2)$ .

Remarque : On peut définir l'écart-type de  $X$ , noté  $\sigma(X)$ , par l'égalité :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

#### Théorème 10 (Formule de Koenig-Hyugens)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie *positive*.  
 $X$  admet une variance si et seulement si  $X^2$  admet une espérance. Dans ce cas,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

### 6.4 Retour sur les lois usuelles de première année

On synthétise dans un tableau les principaux résultats à connaître sur les lois usuelles vues en première année.

Loi	Support	Probabilité	Situation modélisée	Espérance Variance
Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	expérience dont toutes les issues ont la même probabilité	$E(X) = \frac{n+1}{2}$ $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	expérience qui n'a que deux issues possibles : « succès » de probabilité $p$ et « échec » de probabilité $1 - p$	$E(X) = p$ $V(X) = p(1 - p)$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes où $X$ est le nombre de succès	$E(X) = np$ $V(X) = np(1 - p)$

## 6.5 Deux nouvelles lois à connaître : loi géométrique et loi de Poisson

L'originalité de ce chapitre est l'introduction de deux nouvelles lois appelées loi géométrique et loi de Poisson permettant de modéliser des phénomènes aléatoires représentés par des grandeurs à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  ou  $\mathbb{N}$ .

### Définition 11 (Variable aléatoire suivant une loi géométrique)

Soient  $p \in ]0, 1]$  et  $X$  une variable aléatoire.

On dit que  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$  et on note  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  si et seulement si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$ .

$\implies$  Comment reconnaître une variable aléatoire suivant la loi géométrique ?

On considère une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre de succès  $p$ . On note  $X$  le rang de l'épreuve qui a amené le premier succès ou encore le « temps d'attente » du premier succès. Alors  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

Il est essentiel de reconnaître des situations dont la modélisation relève d'une loi géométrique.

★ 1<sup>ier</sup> exemple : On lance une pièce équilibrée et on note  $X$  le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile. Alors  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $1/2$ .

★ 2<sup>ième</sup> exemple : On lance un dé équilibré et on note  $X$  le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un 6. Alors  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $1/6$ .

### Proposition 12 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique)

Soient  $p \in ]0, 1]$  puis  $X$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p$ .

Alors,  $X$  admet une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

### Définition 13 (Variable aléatoire suivant une loi de Poisson)

Soient  $\lambda$  un réel strictement positif et  $X$  une variable aléatoire.

On dit que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et on note  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  si et seulement si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ,
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ .

$\implies$  Comment reconnaître une variable aléatoire suivant la loi de Poisson ?

On cherche à compter le nombre  $X$  d'événements identiques se produisant dans un intervalle de temps donné. Si l'on sait qu'il y a en moyenne  $\lambda$  événements se produisant de manière indépendante dans cet intervalle de temps, alors  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

### Proposition 14 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson)

Soient  $\lambda$  un réel strictement positif puis  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Alors,  $X$  admet une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$