

Chapitre 3

Suites de nombres réels

L'objet de ce chapitre est l'étude détaillée des suites à valeurs réelles. On s'intéresse à leurs aspects qualitatifs (monotonie, convergence ou divergence) mais aussi à leurs aspects quantitatifs (majoration, minoration et encadrement). On insiste sur deux théorèmes majeurs : le théorème de la limite monotone et le théorème des suites adjacentes qui nous garantissent l'existence d'une limite quand on n'est pas en mesure de la déterminer explicitement.

3.1 Généralités sur les suites réelles

Définition 1 (Suite réelle)

Une suite réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarques :

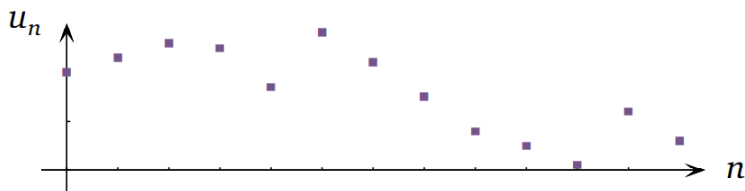
- L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Une suite peut se noter $u : n \mapsto u(n)$, u (notations analogues à celles d'une fonction), $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore (u_n) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le terme de rang ou d'indice n .
- Plus généralement, une suite u peut être définie sur un ensemble de la forme $\llbracket N_0, +\infty \rrbracket$ où $N_0 \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on dit que la suite u est définie à partir d'un certain rang. Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie à partir du rang 1.

Il existe trois façons de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

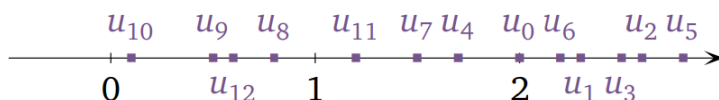
- ★ Explicitement : On donne une formule permettant de calculer u_n , $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n}{n+1}$.
- ★ Implicitement : On définit u_n comme solution d'une équation dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n l'unique solution de l'équation $\tan(x) = x$ appartenant à $] -\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$.
- ★ Par récurrence : On décrit le mécanisme permettant de calculer un terme à partir du précédent ou des précédents. Par exemple, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On peut représenter une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de deux manières.

- ★ 1^{er} point de vue : Une suite étant une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, on peut la représenter dans le plan avec $\mathbb{N}$ en abscisse et $\mathbb{R}$ en ordonnée.



★ 2nd point de vue : On peut aussi placer les termes u_n , $n \in \mathbb{N}$, le long d'un axe.



Définition 2 (Suites majorées, minorées, bornées)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Un tel réel M s'appelle un majorant de la suite u .
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée** si et seulement si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. Un tel réel m s'appelle un minorant de la suite u .
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

Pour montrer qu'une suite est bornée, il faut donc exhiber deux nombres : un minorant et un majorant. Le résultat qui suit montre qu'on peut se limiter à un seul nombre bien choisi.

Proposition 3 (Caractérisation des suites bornées)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Remarque : Pour montrer qu'une suite est bornée, il suffit donc de *majorer sa valeur absolue*.

Définition 4 (Suites croissantes, décroissantes, monotones)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **constante** si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **monotone** si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

Remarques :

- « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone » s'écrit avec des quantificateurs : $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1})$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1})$, et absolument pas : $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leq u_{n+1} \text{ ou } u_n \geq u_{n+1})$. En effet, le quantificateur universel $\forall$ ne se distribue pas sur le « ou ».
- On définit également les notions de suites strictement croissantes, strictement décroissantes et strictement monotones en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

Proposition 5 (Sens de variation et opérations)

- Somme de deux suites :
 - ★ La somme de deux suites croissantes est une suite croissante.
 - ★ La somme de deux suites décroissantes est une suite décroissante.
- Produit de deux suites :
 - ★ Le produit de deux suites croissantes et positives est une suite croissante.
 - ★ Le produit de deux suites décroissantes et positives est une suite décroissante.

Remarque : On peut en fait préciser la proposition précédente.

Dans le cas de la somme, si l'une des deux suites est strictement monotone, alors leur somme est elle aussi strictement monotone.

Dans le cas du produit, si l'une des deux suites est strictement monotone et si elles sont toutes deux *strictement* positives, alors leur produit est lui aussi strictement monotone.

Voici les quatre méthodes usuelles permettant d'étudier le sens de variation d'une suite.

★ 1^{ère} méthode : Etude directe du signe de $u_{n+1} - u_n$.

On fixe $n \in \mathbb{N}$. On exprime $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n puis on étudie le signe de cette différence.

★ 2^{ème} méthode : Etude des variations d'une fonction.

On suppose qu'il existe une fonction f telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$. Si f est croissante (resp. décroissante), alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante). Lorsque f est dérivable, on peut calculer sa dérivée f' et étudier le signe de f' pour en déduire ses variations. On a ainsi ramené un problème de suite à un problème d'étude de fonction.

★ 3^{ème} méthode : Etude de la position de u_{n+1}/u_n par rapport à 1.

Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives. Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

★ 4^{ème} méthode : Raisonnement par récurrence.

Lorsque les trois méthodes précédentes ne sont pas applicables, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence et que le calcul des premiers termes de la suite laisse deviner sa monotonie, on peut essayer un raisonnement par récurrence pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ (cas où u est croissante) ou $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ (cas où u est décroissante).

3.2 Limite d'une suite réelle

On s'intéresse dans cette partie au comportement asymptotique d'une suite réelle u , c'est-à-dire aux valeurs de u_n lorsque « n devient grand ». On définit d'abord la notion de suites convergentes, qui sont les suites qui vont prendre des valeurs « aussi proches que l'on veut » d'un certain réel l lorsque n devient grand.

Définition 6 (Suite convergeant vers un réel)

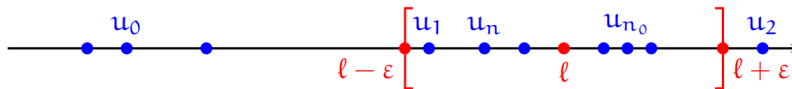
Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon).$$

Remarques :

- La proposition avec quantificateurs s'écrit de manière abrégée : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$.
- Il est essentiel de comprendre profondément le sens de cette définition. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver un rang N_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont compris entre $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$.



- On peut remplacer l'inégalité large $|u_n - l| \leq \varepsilon$ par l'inégalité stricte $|u_n - l| < \varepsilon$ dans la définition.

Proposition 7 (Unicité de la limite)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $(l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$.

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_1 et vers l_2 , alors $l_1 = l_2$.

Remarque : Une suite convergente possède donc une unique limite. Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $l \in \mathbb{R}$, on écrira : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. On pourra trouver également les notations : $\lim u_n = l$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ et $u_n \longrightarrow l$.

On classe à présent les suites en deux catégories : les suites convergentes et les autres, appelées suites divergentes.

Définition 8 (Suite convergente, suite divergente)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** si et seulement si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **divergente** si et seulement si elle n'est pas convergente.

Proposition 9 (Une suite convergente est bornée.)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est **bornée**.

Il existe trois types de suites divergentes : celles qui prennent des valeurs arbitrairement grandes lorsque n devient grand, celles qui prennent des valeurs arbitrairement petites lorsque n devient grand et les autres qui *divergent sans limite*.

La définition rigoureuse d'une suite prenant des valeurs arbitrairement grandes lorsque n devient grand est la suivante.

Définition 10 (Suite divergeant vers $+\infty$)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

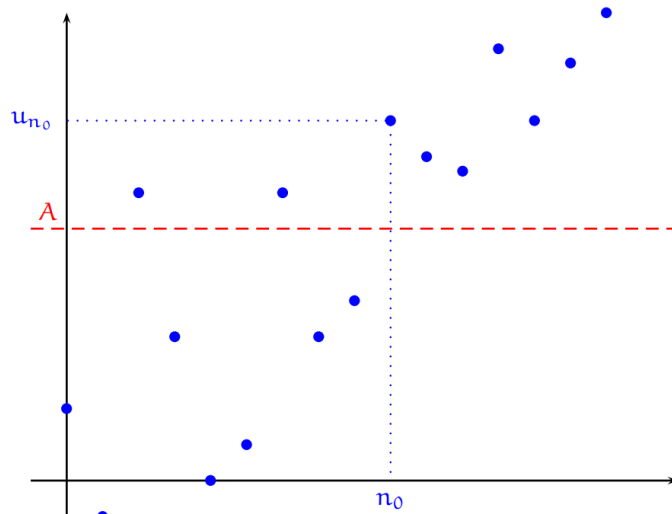
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_0 \implies u_n \geq A).$$

On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Remarques :

- La proposition avec quantificateurs s'écrit de manière abrégée : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n \geq A$.
- Il est essentiel de comprendre profondément le sens de cette définition. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si, pour tout $A \in \mathbb{R}$ fixé, on peut trouver un rang N_0 à partir duquel tous les termes de la suite dépassent A .



- On peut remplacer l'inégalité large $u_n \geq A$ par l'inégalité stricte $u_n > A$ dans la définition et $A \in \mathbb{R}$ par $A > 0$.

On définit de manière analogue ce qu'est une suite prenant des valeurs arbitrairement petites lorsque n devient grand.

Définition 11 (Suite divergeant vers $-\infty$)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_0 \implies u_n \leq B).$$

On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Remarques :

- La proposition avec quantificateurs s'écrit de manière abrégée : $\forall B \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n \leq B$.
- Il est essentiel de comprendre profondément le sens de cette définition. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si, pour tout $B \in \mathbb{R}$ fixé, on peut trouver un rang N_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dépassés par B .
- On peut remplacer l'inégalité large $u_n \leq B$ par l'inégalité stricte $u_n < B$ dans la définition et $B \in \mathbb{R}$ par $B < 0$.

Il est immédiat qu'une suite réelle de limite infinie n'est pas bornée et est donc effectivement divergente. On pourra garder en tête le tableau récapitulatif ci-dessous :

Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite
Convergence	Divergence	

On établit la liste des limites de référence à connaître. Elles sont énoncées sous la forme d'un théorème, ce qui signifie qu'elles peuvent être utilisées telles quelles en exercices et n'ont pas à être redémontrées.

Théorème 12 (Limites de référence)

- Suites géométriques : Soit $q \in \mathbb{R}$.
 - ★ Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
 - ★ Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
 - ★ Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
 - ★ Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge sans limite.
- Suites de type puissance : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - ★ Si $\alpha < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$.
 - ★ Si $\alpha = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 1$.
 - ★ Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$.

On résume dans trois tableaux les théorèmes opératoires portant sur les limites de suites.
Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles dont le comportement asymptotique est décrit ci-dessous.

• Somme :

u_n tend vers	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
v_n tend vers	ℓ'	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$u_n + v_n$ tend vers	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

• Produit :

u_n tend vers	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
v_n tend vers	ℓ'	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$u_n \times v_n$ tend vers	$\ell\ell'$	$\text{sgn}(\ell) \times +\infty$	$\text{sgn}(\ell) \times -\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

• Quotient :

u_n tend vers	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
v_n tend vers	$\ell' \neq 0$	0^+	0^+	0^-	0^-	$\ell > 0$	$\ell < 0$
u_n/v_n tend vers	ℓ/ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

u_n tend vers	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
v_n tend vers	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$\pm\infty$
u_n/v_n tend vers	$-\infty$	$+\infty$	?	?

Comme le montrent les tableaux précédents, on ne peut pas toujours conclure quant au comportement de la suite construite à partir de u et de v . Il y a quatre **formes indéterminées** auxquelles on ajoute une cinquième :

$$(+\infty) + (-\infty), \quad \infty \times 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{et} \quad 1^\infty.$$

Comme $\frac{1}{\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = \infty$, il n'y a en fait que trois **formes indéterminées** :

$$(+\infty) + (-\infty), \quad \infty \times 0 \quad \text{et} \quad 1^\infty.$$

Dans les cas précédents, tout peut arriver : convergence vers un réel, divergence vers l'infini ou divergence sans limite.

Constatons-le effectivement sur la dernière forme indéterminée 1^∞ , qui est la nouvelle forme indéterminée.

★ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$: convergence vers un réel.

★ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$: divergence vers $+\infty$.

★ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge sans limite (la suite extraite des termes d'indices pairs converge vers e tandis que la suite extraite des termes d'indices impairs converge vers $-e$).

3.3 Limites et inégalités

Les inégalités larges « passent à la limite ». Autrement dit, si deux suites convergentes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont rangées dans un certain ordre, ce sera aussi le cas de leurs limites.

Proposition 13 (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l_1 ,
- la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l_2 ,
- il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $u_n \leq v_n$.

Alors, $l_1 \leq l_2$.

Remarques :

- La convergence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une hypothèse. On ne passe pas à la limite sans avoir vérifié au préalable la convergence des suites étudiées.
- Les inégalités strictes ne sont *pas conservées* par passage à la limite : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Une suite convergente a le même signe que sa limite pour n suffisamment grand.

Proposition 14 (Signe d'une suite convergente à partir d'un certain rang)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l > 0$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0$, $u_n > 0$.

On énonce à présent trois théorèmes d'existence de limite basés sur des inégalités.

Théorème 15 (Théorème des gendarmes)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles. Soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l ,
- la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l ,
- il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$.

Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Remarque : Un corollaire du théorème des gendarmes est le résultat suivant.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $|u_n - l| \leq v_n$ et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Proposition 16 (Théorème de minoration)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$,
- il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $u_n \leq v_n$.

Alors, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Proposition 17 (Théorème de majoration)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :

- la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$,
- il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $u_n \leq v_n$.

Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

3.4 Suites monotones

On énonce dans cette partie deux résultats importants garantissant la convergence de suites monotones : le théorème de la limite monotone et le théorème des suites adjacentes. En exercices, lorsqu'on vous demandera de justifier qu'une certaine suite possède une limite finie et que vous n'êtes pas en mesure de donner la valeur précise de cette limite, il faudra penser à ces théorèmes qui sont des résultats d'*existence* de limite.

Théorème 18 (Théorème de la limite monotone)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

• Cas où u est croissante :

★ Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** et **majorée**, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

★ Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

• Cas où u est décroissante :

★ Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** et **minorée**, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

★ Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Elément de preuve : Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. A n'est pas un majorant de la suite u donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N_0} > A$. Par croissance, $\forall n \geq N_0, u_n \geq u_{N_0} > A$. On a donc montré que : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n \geq A$. Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On définit à présent la notion de suites adjacentes.

Définition 19 (Suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si et seulement si :

- l'une des deux suites est croissante,
- l'autre suite est décroissante,
- la différence des deux suites tend vers 0.

Remarque : Les suites u et v sont adjacentes si et seulement si les suites v et u sont adjacentes.

Théorème 20 (Théorème des suites adjacentes)

Deux suites adjacentes **convergent** et ont la même limite.

Esquisse de preuve : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. On suppose que u est croissante et que v est décroissante. On démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 donc converge d'après le théorème de la limite monotone. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0 donc converge d'après le théorème de la limite monotone. Enfin, comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_n - v_n) + v_n$ et que $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on déduit par passage à la limite que u et v ont la même limite.

Remarque : Le théorème des suites adjacentes fournit en plus un encadrement de la limite, notée l . Précisément, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$. On peut par exemple donner un encadrement du nombre de Neper e et de la constante d'Euler γ qui sont tous deux limites de suites adjacentes.

3.5 Suites extraites

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On souhaiterait construire à partir de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une nouvelle suite en ne conservant que certains termes. On peut par exemple garder $u_0, u_2, u_4, \dots$, ce qui nous conduit à considérer une nouvelle suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}$. On pourrait aussi ne garder que les termes d'indices impairs $u_1, u_3, u_5, \dots$, ce qui nous conduit cette fois à considérer la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n+1}$. On constate que dans les deux cas précédents, v_n s'écrit sous la forme $u_{\varphi(n)}$ où n est l'indice du terme considéré de la suite v et $\varphi(n)$ est l'indice du terme correspondant de la suite u ; $2n$ dans le premier cas et $2n + 1$ dans le second. Cette construction peut en fait être réalisée avec toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante*.

Définition 21 (Suite extraite)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction *strictement croissante*.

Remarques :

- φ est appelée une *extractrice*. On impose que la fonction φ soit strictement croissante car on veut construire la suite v à partir de la suite u en choisissant des termes d'indices différents dans la suite u et sans changer leur ordre d'apparition.
- La fonction φ vérifie la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

En cas d'existence de limite, le comportement asymptotique d'une suite extraite est le même que celui de la suite dont elle est issue.

Proposition 22 (Si une suite possède une limite, alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l , alors toute suite-extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ce même réel.
- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors toute suite-extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors toute suite-extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Remarque : Par contraposée, pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge sans limite*, il suffit d'exhiber deux sous-suites ayant des limites différentes ou une sous-suite divergeant sans limite.

Réciproquement, le comportement asymptotique des suites extraites d'indices pairs et impairs nous donne des renseignements sur le comportement asymptotique de la suite dont elles sont issues.

Proposition 23 (Suites des termes d'indices pairs et impairs et limites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers le **même** réel l , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .
- Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ divergent vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

On termine cette partie en énonçant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 24 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite réelle **bornée**, on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque : On peut démontrer ce théorème par dichotomie en construisant une suite de segments emboîtés $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ dont la longueur est divisée par 2 à chaque itération et une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$. Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure.

3.6 Suites particulières

Dans cette partie, on s'intéresse à trois types particuliers de suites définies par récurrence : les suites arithmétiques, les suites géométriques et les suites arithmético-géométriques. Pour chacune de ces suites, on donne une formule générale permettant de calculer son terme d'indice n .

3.6.1 Suites arithmétiques

Définition 25 (Suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si et seulement si $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$.

Le réel r est appelé la **raison** de la suite.

Remarque : La raison r est uniquement définie. En effet, $r = u_1 - u_0$.

Proposition 26 (Expression du terme d'indice n d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_p + (n - p)r.$$

On rappelle la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, déjà vue au chapitre *Les symboles $\sum$ et $\prod$* .

Proposition 27 (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique réelle. Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Alors,

$$\sum_{k=p}^n u_k = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2}.$$

On retiendra que : $\sum_{k=p}^n u_k = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2}$.

3.6.2 Suites géométriques

Définition 28 (Suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique si et seulement si $\exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$.

Remarque : Si $u_0 \neq 0$, alors le réel q est uniquement défini ($= u_1/u_0$) et est appelé la **raison** de la suite.

Proposition 29 (Expression du terme d'indice n d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$. Alors,

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

On rappelle la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, déjà vue au chapitre
Les symboles $\sum$ et $\prod$.

Proposition 30 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$.

- Raison différente de 1 : Si $q \neq 1$, alors $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$.
- Raison égale à 1 : Si $q = 1$, alors $\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1)u_p$.

Lorsque $q \neq 1$, on retiendra que : $\sum_{k=p}^n u_k = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$.

3.6.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 31 (Suite arithmético-géométrique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b et, si $b = 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a . Les suites arithmético-géométriques sont donc une généralisation des suites arithmétiques et géométriques.

Etant donnée une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notre but est d'établir une formule explicite pour son terme général u_n , $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 32 (Expression du terme d'indice n d'une suite arithmético-géométrique)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$ puis $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

On note $\omega = \frac{b}{1-a}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \omega + a^n(u_0 - \omega)$.

Esquisse de preuve : L'unique suite constante vérifiant la même relation de récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(\omega)_{n \in \mathbb{N}}$. On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \omega$. On montre que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a . L'expression du terme général d'une suite géométrique de raison a fournit l'égalité recherchée.

Remarque : Il ne faut pas apprendre par cœur la formule de cette proposition mais savoir la retrouver.

3.7 Suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I et $a \in I$. On souhaite définir par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de a et de f en posant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Cette définition impose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartienne au domaine de définition de f , c'est-à-dire I . Ceci nous conduit naturellement à la notion d'intervalle stable.

Définition 33 (Intervalle stable par une fonction)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I . L'intervalle I est **stable** par f si et seulement si $f(I) \subset I$. Autrement dit, **I est stable par $f \iff \forall x \in I, f(x) \in I$** .

Lorsque I est stable, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est parfaitement définie et ses termes se calculent de proche en proche à partir de f . Notre objectif est de récupérer un maximum d'informations sur la suite u à partir de la fonction f : ses variations et, en cas d'existence, la valeur de sa limite.

Proposition 34 (Monotonie d'une suite définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I . On suppose que l'intervalle I est stable par f . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in I$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si f est croissante sur I , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- Si f est décroissante sur I , alors les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.
- Si $\forall x \in I, f(x) - x \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $\forall x \in I, f(x) - x \leq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

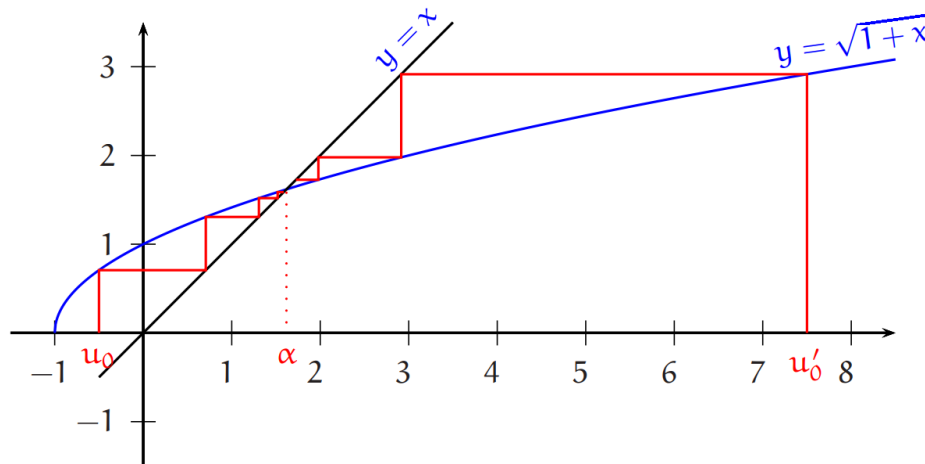
Théorème 35 (Limite d'une suite définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I . On suppose que l'intervalle I est stable par f . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in I$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in I$ et que f est **continue** en l , alors **$f(l) = l$** .

Remarque : Ainsi, en cas de convergence, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à chercher parmi les *points fixes* de f .

Considérons l'exemple suivant. Soient $a \in [-1, +\infty[$ puis $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 = a$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.



On peut montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.