Chapitre 17

Réduction des matrices carrées

Dans tout ce chapitre, $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul. Néanmoins, dans la pratique, on se limitera à des matrices carrées d'ordre inférieur ou égal à 3.

17.1 Matrices carrées diagonalisables

Définition 1 (Matrice carrée diagonalisable)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On dit que A est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Remarques :
- L'égalité précédente se réécrit : $D = P^{-1}AP$ (il suffit de multiplier à gauche par P^{-1} et à droite par P l'égalité de la définition).
- Lorsque l'on arrive à trouver de telles matrices D et P, on dit qu'on a *réduit* la matrice A, ce qui explique le titre de ce chapitre. On verra plus loin que l'écriture $A = PDP^{-1}$ est très féconde et permet par exemple de calculer facilement les puissances successives de A.

Proposition 2 (Une condition suffisante de diagonalisabilité)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Si $AP = PD$, alors la matrice A est diagonalisable.

Preuve : Supposons que $AP = PD$. En multipliant à droite par P^{-1} cette égalité, on obtient : $APP^{-1} = PDP^{-1}$. Comme $PP^{-1} = I_n$, on en déduit que $A = PDP^{-1}$, donc que A est diagonalisable.

Remarque : Lorsque $AP = DP$, si l'on sait que P est inversible (et que D est une matrice diagonale), il n'y a pas besoin de calculer explicitement P^{-1} pour en déduire la diagonalisabilité de A.

En cas de diagonalisabilité, on peut légitimement se demander ce que contient la matrice D. Ses coefficients diagonaux sont des réels particuliers appelés valeurs propres.

Définition 3 (Valeur propre, vecteur propre d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne non nul.
On dit que X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si :

$$AX = \lambda X.$$

Remarque : Insistons. Un vecteur propre est *non nul*.

Définition 4 (Sous-espace propre associé à une valeur propre)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ, noté $E_\lambda(A)$, est défini par :

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\big(A - \lambda I_n\big) = \big\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda X\big\}.$$

$\star$ Exemple de diagonalisation d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On note $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $AV_1 = 3V_1$, V_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.
Comme $AV_2 = -V_2$, V_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

On note $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On note que D est une matrice diagonale. Montrons que P est inversible.

On calcule : $\det(P) = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2$. Comme le déterminant de P est non nul, P est inversible et son inverse est $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Par un calcul de produit matriciel, $PDP^{-1} = A$ donc A est diagonalisable.

On remarque que *la matrice P est construite à partir des vecteurs propres de A et la matrice D à partir des valeurs propres correspondantes.*

$\star$ Exemple de diagonalisation d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ une matrice carrée. On note $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $AV_1 = V_1$, V_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
Comme $AV_2 = 6V_2$, V_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 6.
Comme $AV_3 = -2V_3$, V_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2.

On note $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On note que D est une matrice diagonale. Montrons que P est inversible. On utilise la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3, L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

On déduit de la résolution du système précédent que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Par un calcul de produit matriciel, $PDP^{-1} = A$ donc A est diagonalisable.
On remarque que *la matrice P est construite à partir des vecteurs propres de A et la matrice D à partir des valeurs propres correspondantes.*

17.2 Trois critères simples de diagonalisabilité

On énonce trois théorèmes assurant immédiatement qu'une matrice est diagonalisable.

Théorème 5 (Critère de diagonalisabilité obtenu à partir des dimensions des sous-espaces propres)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si la somme des dimensions des sous-espaces propres associés à A est égale à n, alors A est diagonalisable.

Théorème 6 (Diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres distinctes)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Théorème 7 (Diagonalisabilité d'une matrice symétrique)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est symétrique, alors A est diagonalisable.

17.3 Polynômes de matrices et applications à la diagonalisabilité

On a vu à la section précédente l'importance des vecteurs propres et des valeurs propres pour réduire une matrice. Mais comment déterminer simplement des valeurs propres ? Les polynômes annulateurs offrent un axe de réponse.

Définition 8 (Polynôme d'une matrice)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme.
On appelle $P(A)$ la matrice définie par l'égalité : $P(A) = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$.

Définition 9 (Polynôme annulateur d'une matrice)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $P(x)$ un polynôme.
On dit que $P(x)$ est un polynôme annulateur de la matrice A si et seulement si $P(A) = 0_n$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Considérons $P(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$.

Alors, $P(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = 0_2$.
Autrement dit, $P(x)$ est un polynôme annulateur de A. On déduit de ce calcul que toute matrice de format $(2,2)$ possède au moins un polynôme annulateur. C'est en fait le cas de toute matrice. La question qui se pose alors est la suivante :

Etant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, comment déterminer un polynôme annulateur de A ?

Pas de panique ; vous serez systématiquement guidés en exercices. Précisément, on vous demandera de montrer la nullité d'une expression polynomiale matricielle afin d'*en déduire* un polynôme annulateur.

Théorème 10 (Une valeur propre est une racine de tout polynôme annulateur.)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $P(x)$ un polynôme.
Si $P(x)$ est un polynôme annulateur de A, alors toute valeur propre de A est racine du polynôme $P(x)$.

Remarque : Attention, la réciproque est fausse. Toute racine d'un polynôme annulateur n'est pas forcément une valeur propre.

On retiendra que les valeurs propres sont à chercher *parmi les racines d'un polynôme annulateur*.

Les polynômes annulateurs permettent également de déterminer l'inverse d'une matrice.

Théorème 11 (Inverse d'une matrice obtenue à l'aide d'un polynôme annulateur)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme *annuleur* de A.
Si $a_0 \neq 0$, alors la matrice A est inversible. De plus, $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}(a_d A^{d-1} + \cdots + a_1 I_n)$.

Traitons un exemple.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice carrée. Comme $A^3 + A^2 + I_3 = 0_3$, le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A. On note que : $A(-A^2 - A) = I_3$. Donc A est inversible et $A^{-1} = -A^2 - A$.

17.4 Applications de la diagonalisabilité

Une application majeure de la diagonalisabilité est le calcul des puissances successives d'une matrice.

Proposition 12 (Puissance $k^{\text{ième}}$ d'une matrice diagonalisable)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée diagonalisable.
Par définition, il existe $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \times \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n^k \end{pmatrix} \times P^{-1}.$$

On verra en exercices que le calcul des puissances successives d'une matrice permet l'étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou 3 ainsi que l'étude de systèmes de 2 ou 3 suites récurrentes.