Chapitre 16

Compléments d'analyse

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales dans les cadres discret (cas des suites) et continu (cas des fonctions). On présente les trois grands types de relations de comparaison : les relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence, puis on développe la théorie des développements limités qui sont les principaux outils du calcul asymptotique et permettent par exemple de calculer facilement des limites.

16.1 Relations de comparaison : cas des suites

16.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 (Relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

• Relation de domination :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est dominée par } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \exists M \in \mathbb{R}^+, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n| \leq M|v_n|.$$

On note alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

• Relation de négligeabilité :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est négligeable devant } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n| \leq \varepsilon|v_n|.$$

On note alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

• Relation d'équivalence :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est équivalente à } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - v_n| \leq \varepsilon|v_n|.$$

On note alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Remarques :

• $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ se lit « u_n est un grand O de v_n » et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ se lit « u_n est un petit o de v_n ».

• Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit aussi que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est prépondérante devant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On observe que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Autrement dit, *derrière un symbole* $\sim$ *se cache toujours un petit o*. On écrira de manière plus commode : $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Théorème 2 (Lien entre la relation d'équivalence et la relation de négligeabilité)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n).$$

On propose maintenant une caractérisation séquentielle des relations de comparaison qui présente l'avantage de ne manipuler que des suites et non des ε.

Théorème 3 (Caractérisation séquentielle des relations de comparaison)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ si et seulement si il existe un rang N_0 et une suite $(b_n)_{n\geq N_0}$ bornée telle que : $\forall n \geq N_0, u_n = b_n v_n$.
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ si et seulement si il existe un rang N_0 et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq N_0}$ convergeant vers 0 telle que :
$$\forall n \geq N_0, u_n = \varepsilon_n v_n.$$
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si il existe un rang N_0 une suite $(\eta_n)_{n\geq N_0}$ convergeant vers 1 telle que :
$$\forall n \geq N_0, u_n = \eta_n v_n.$$

Dans le cas où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on peut réécrire les définitions des relations de comparaison d'une manière bien plus efficace à l'aide de quotients.

Théorème 4 (Caractérisation des relations de comparaison à l'aide de quotients)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang N_0.

- $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ si et seulement si la suite $(u_n/v_n)_{n\geq N_0}$ est bornée.
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ si et seulement si la suite $(u_n/v_n)_{n\geq N_0}$ converge vers 0.
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si la suite $(u_n/v_n)_{n\geq N_0}$ converge vers 1.

Remarque : *On pensera en pratique les relations de comparaison en termes de quotients.*

16.1.2 Le théorème des croissances comparées

On énonce à présent le théorème des croissances comparées qui compare à juste titre le comportement des suites de types puissance, géométrique, factorielle et puissance $n^{\text{ième}}$. Il y a cinq points à retenir.

Théorème 5 (Croissances comparées)

- Comparaison puissance - puissance : Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Si $\alpha_1 < \alpha_2$, alors $n^{\alpha_1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\alpha_2})$.
- Comparaison géométrique - géométrique : Soit $(q_1, q_2) \in (]0, +\infty[)^2$. Si $q_1 < q_2$, alors $q_1^n \underset{n\to+\infty}{=} o(q_2^n)$.
- Comparaison puissance - géométrique : Soit $(\alpha, q) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

$\star$ Si $0 < q < 1$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$.

$\star$ Si $q > 1$, alors $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$.

- Comparaison géométrique - factorielle : $\forall q \in]0, +\infty[, q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.
- Comparaison factorielle - puissance $n^{\text{ième}}$: $n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)$.

16.1.3 Applications de la relation d'équivalence

On détaille ici les deux applications phares de la relation d'équivalence : le calcul de limites et l'étude de signes au voisinage de $+\infty$.

Proposition 6 (Equivalents et calculs de limites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

- Soit $l \in \mathbb{R}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge également vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge également vers $-\infty$.

Remarque : D'une manière générale, on retiendra que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites équivalentes, alors elles ont le même comportement asymptotique.

Proposition 7 (Equivalents et étude de signes au voisinage de $+\infty$)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors il existe un rang à partir duquel u_n et v_n ont le même signe.

Remarque : Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites équivalentes et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

16.2 Relations de comparaison : cas des fonctions

Dans la suite de ce chapitre, D désigne une réunion finie d'intervalles non vides et non réduits à un singleton et I est un intervalle non vide et non réduit à un singleton.

16.2.1 Définitions et premières propriétés

On rappelle que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On définit d'abord ce qu'est un voisinage de a. Soit V une partie de $\overline{\mathbb{R}}$. On distingue trois cas.

- Cas où $a \in \mathbb{R}$: V est un voisinage de a si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset V$.
- Cas où $a = +\infty$: V est un voisinage de a si et seulement si il existe $A > 0$ tel que $]A, +\infty] \subset V$.
- Cas où $a = -\infty$: V est un voisinage de a si et seulement si il existe $A < 0$ tel que $[-\infty, A[\subset V$.

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

On dit que a est *adhérent* à D (dans $\overline{\mathbb{R}}$) si et seulement si pour tout $V_a \in \mathcal{V}(a)$, $D \cap V_a \neq \emptyset$.

On peut maintenant définir dans un cadre unifié les relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence de fonctions.

Définition 8 (Relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.

- Relation de domination :

$$f \text{ est dominée par } g \text{ au voisinage de } a \iff \exists M \in \mathbb{R}^+, \exists V_a \in \mathcal{V}(a), \forall x \in D \cap V_a, |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

On note alors : $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.

- Relation de négligeabilité :

$$f \text{ est négligeable devant } g \text{ au voisinage de } a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists V_a \in \mathcal{V}(a), \forall x \in D \cap V_a, |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

On note alors : $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

- Relation d'équivalence :

$$f \text{ est équivalente à } g \text{ au voisinage de } a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists V_a \in \mathcal{V}(a), \forall x \in D \cap V_a, |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

On note alors : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Remarques :

- $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ se lit « f est un grand O de g au voisinage de a » et $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ se lit « f est un petit o de g au voisinage de a ».
- Lorsque f est négligeable devant g au voisinage de a, on dit aussi que g est prépondérante devant f au voisinage de a.

On observe que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$. Autrement dit, *derrière un symbole* $\sim$ *se cache toujours un petit* o. On écrira de manière plus commode : $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$.

Théorème 9 (Lien entre la relation d'équivalence et la relation de négligeabilité)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x)).$$

On propose maintenant une caractérisation fonctionnelle des relations de comparaison qui présente l'avantage de ne manipuler que des fonctions et non des ε.

Théorème 10 (Caractérisation fonctionnelle des relations de comparaison)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.

- $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si et seulement si il existe V_a un voisinage de a et une fonction $b : D \cap V_a \to \mathbb{R}$ bornée telle que :
$$\forall x \in D \cap V_a, f(x) = b(x)g(x).$$
- $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si et seulement si il existe V_a un voisinage de a et une fonction $\varepsilon : D \cap V_a \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 quand x tend vers a telle que :
$$\forall x \in D \cap V_a, f(x) = \varepsilon(x)g(x).$$
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si il existe V_a un voisinage de a et une fonction $\eta : D \cap V_a \to \mathbb{R}$ tendant vers 1 quand x tend vers a telle que :
$$\forall x \in D \cap V_a, f(x) = \eta(x)g(x).$$

Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, on peut réécrire les définitions des relations de comparaison d'une manière bien plus efficace à l'aide de quotients.

Théorème 11 (Caractérisation des relations de comparaison à l'aide de quotients)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. On suppose que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a avec dans ce cas $f(a) = 0$).

- $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si et seulement si la fonction f/g est bornée au voisinage de a.
- $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si et seulement si la fonction f/g tend vers 0 quand x tend vers a.
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si la fonction f/g tend vers 1 quand x tend vers a.

Remarque : *On pensera en pratique les relations de comparaison en termes de quotients.*

16.2.2 Applications de la relation d'équivalence

Proposition 12 (Equivalents et calculs de limites)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

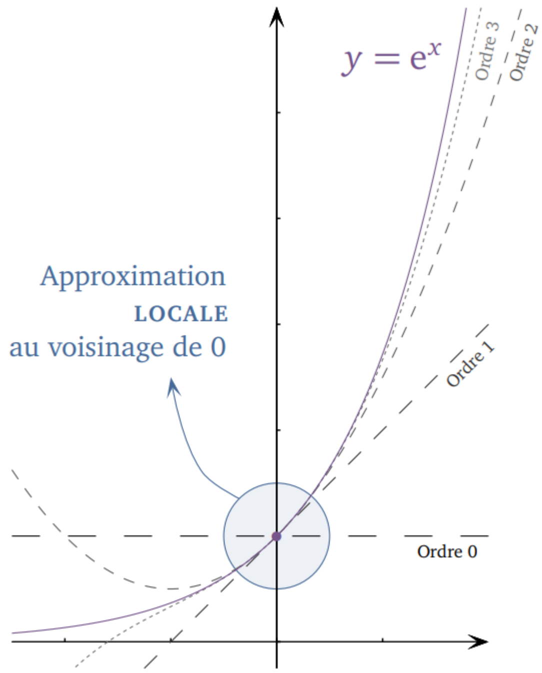
- Soit $l \in \mathbb{R}$. Si f tend vers l quand x tend vers a, alors g tend également vers l quand x tend vers a.
- Si f diverge vers $+\infty$ quand x tend vers a, alors g diverge également vers $+\infty$ quand x tend vers a.
- Si f diverge vers $-\infty$ quand x tend vers a, alors g diverge également vers $-\infty$ quand x tend vers a.

Proposition 13 (Equivalents et étude de signes au voisinage de a)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.
Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe au voisinage de a.

16.3 Développements limités

Etant donnée une fonction f, l'objectif de cette partie est d'approcher f par une fonction polynomiale au voisinage d'un point.



16.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 14 (Développement limité au voisinage d'un réel)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D. Soit $n \in \mathbb{N}$.
f admet un développement limité d'ordre n en a si et seulement si il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$

Remarques :
• Une fonction n'admet pas forcément de développement limité à un ordre donné. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de développement limité d'ordre 0 en 0.
• Une fonction peut admettre un développement limité à l'ordre n mais pas à l'ordre $n+1$. C'est le cas de la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x^{n+\frac{1}{2}}$ qui admet un développement limité à l'ordre n en 0 mais pas à l'ordre $n+1$.
• *f admet un développement limité d'ordre n en a si et seulement si $g : h \mapsto f(a+h)$ admet un développement limité d'ordre n en* 0. Ainsi, pour déterminer un développement limité en a, on pose $x = a + h$ et on cherche un développement limité quand h tend vers 0.

Les coefficients d'un développement limité sont *uniquement* définis.

Soit f une fonction possédant un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a (noté $\mathrm{DL}_n(a)$) :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$

On note P la fonction polynomiale définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. La fonction $x \mapsto P(x-a)$ est appelée *la* partie régulière du développement limité à l'ordre n de f en a.

On déduit immédiatement de l'unicité des coefficients d'un développement limité le résultat ci-dessous.

Proposition 15 (Développement limité d'une fonction paire et d'une fonction impaire)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité d'ordre n en a.
• Si f est paire, alors les coefficients *impairs* du $\mathrm{DL}_n(a)$ sont nuls.
• Si f est impaire, alors les coefficients *pairs* du $\mathrm{DL}_n(a)$ sont nuls.

Lorsque $n = 0$ ou 1, l'existence d'un développement limité à l'ordre n nous donne des informations sur la régularité de f.

Proposition 16 (Equivalence $\mathrm{DL}_0(a)$ - continuité en a et $\mathrm{DL}_1(a)$ - dérivabilité en a)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.
• f est continue en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 en a.
• f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a.

16.3.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 17 (Formule de Taylor-Young)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est de *classe* $\mathcal{C}^n$ sur I, alors f admet un développement limité d'ordre n en a, appelé développement de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

<ins>Remarque :</ins> On peut en fait alléger l'hypothèse portant sur f. Il suffit que f soit $n-1$ fois dérivable au voisinage de a et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a pour que la formule de Taylor-Young soit vérifiée, ce qui se dit de manière condensée « f est n fois dérivable en a ».

Théorème 18 (Formulaire de développements limités en 0)

• $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$

• $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$

• $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$

• $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ où $\dbinom{\alpha}{0} = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$

16.3.3 Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction

On présente ici les trois applications standards des développements limités : la recherche d'équivalents, la recherche d'extrema et l'étude locale d'un graphe.

Recherche d'équivalents

Les développements limités sont un outil très commode pour déterminer un équivalent.

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que f admet un développement limité d'ordre n en a. Donc il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

Sous l'hypothèse que tous les a_k, $0 \leq k \leq n$, ne sont pas nuls, on peut définir $i_0 = \min\left\{k \in [\![0, n]\!], a_k \neq 0\right\}$. Alors,

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_{i_0}(x-a)^{i_0}.$$

On retiendra que *le premier terme non nul d'un développement limité fournit un équivalent.*

Recherche d'extrema

Les développements limités nous permettent de démontrer facilement une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un extremum local.

Théorème 19 (Une condition nécessaire et une condition suffisante d'existence d'un extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Soit a un point *intérieur* à I.
• Si f est dérivable en a et si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
• Si f est deux fois dérivable en a, si $f'(a) = 0$ et si $f''(a) \neq 0$, alors f admet un extremum local en a.

Remarques :
• Pour faire simple, dire que a est un point intérieur à l'intervalle I signifie que a n'est pas une extrémité de I.
• Le premier point du théorème est connu. Commentons le second. Sous ses hypothèses, f admet un développement limité d'ordre 2 en a de la forme :

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}((x-a)^2).$$

On en déduit que $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$. Donc $f(x) - f(a)$ est du signe de $f''(a)$ au voisinage de a.
Si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a.
Si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a.
• Si $f''(a) = 0$, alors on ne peut pas conclure. La fonction $x \mapsto x^4$ qui possède des dérivées première et seconde nulles en 0 admet un minimum local (et même global) en 0 tandis que la fonction $x \mapsto x^3$ qui possède également des dérivées première et seconde nulles en 0 n'admet pas d'extremum local en 0.

Etude locale d'un graphe

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a-r, a+r[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $p \geq 2$ et $(a_0, a_1, a_p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + \underset{x\to a}{o}((x-a)^p).$$

On sait déjà que f est continue en a et que $f(a) = a_0$.
On sait également que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$.
L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$, notée T_A, est : $y = f'(a)(x-a) + f(a) = a_1(x-a) + a_0$.
La position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_A est donnée par le signe de $f(x) - (a_1(x-a) + a_0)$ qui est celui de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a.
• Si $a_p > 0$ et si p est pair, alors $\mathcal{C}_f$ est localement au-dessus de T_A.
• Si $a_p < 0$ et si p est pair, alors $\mathcal{C}_f$ est localement en dessous de T_A.
• Si p est impair, alors T_A traverse $\mathcal{C}_f$.
Supposons en outre que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $]a-r, a+r[$. On peut montrer que f'' change de signe au voisinage de a et donc que A est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.