Chapitre 13

Intégration sur un segment

Dans tout ce chapitre, a et b désignent deux réels tels que $a \leq b$.

13.1 Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

On commence par quelques rappels du cours de terminale.

Définition 1 (Primitive)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Il s'avère que toute fonction continue sur un intervalle, c'est-à-dire toute fonction dont on peut tracer le graphe « sans lever son crayon », admet une primitive.

Théorème 2 (Existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est continue sur I, alors f admet au moins une primitive F sur I.

Remarque : Si on connaît une primitive F d'une fonction f, alors on les connaît toutes. Ce sont précisément les fonctions de la forme $F + c$ où c est une constante réelle.

On est à présent en mesure de définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Définition 3 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment)

Soient f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ puis F une primitive de f.
L'intégrale de f entre a et b est par définition le nombre réel $F(b) - F(a)$, noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Autrement dit,

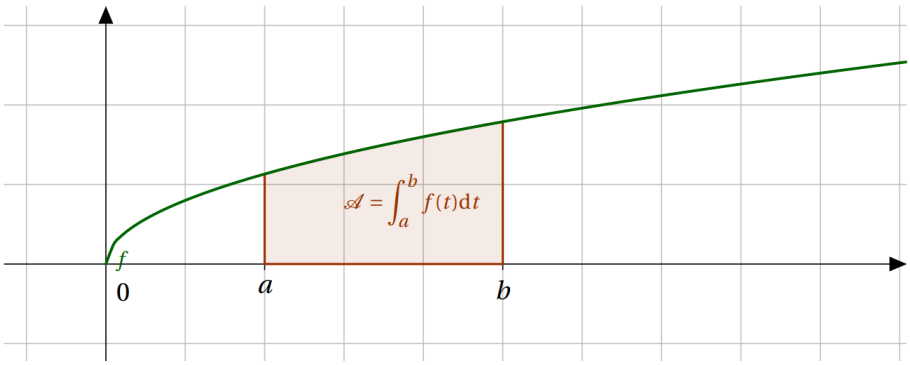
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque : Cette définition ne dépend pas de la primitive de f choisie. Soit G une autre primitive de f. Alors, il existe une constante réelle c telle que $G = F + c$. On en déduit que :
$\Big[G(t)\Big]_a^b = G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$
On termine ces rappels en précisant l'interprétation géométrique de l'intégrale.

Proposition 4 (Interprétation géométrique de l'intégrale)

Soit f une fonction continue positive sur le segment $[a, b]$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ représente l'aire de la surface comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.



13.2 Propriétés de l'intégrale

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment possède trois propriétés fondamentales : la linéarité, la relation de Chasles et la positivité.

Théorème 5 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$. Alors, pour tous réels α et β,

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 6 (Relation de Chasles)

Soient f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et $c \in [a, b]$ un réel. Alors,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 7 (Positivité de l'intégrale)

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

- Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$.
- Si f est positive sur $[a, b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a, b]$.
- Si f est positive et non identiquement nulle sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$.

On déduit de la positivité de l'intégrale une propriété de croissance.

Proposition 8 (Croissance de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$.

Si, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Preuve : Si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors pour tout $t \in [a,b]$, $g(t) - f(t) \geq 0$ et on utilise la positivité de l'intégrale pour conclure.

13.3 Méthodes de calcul d'une intégrale

On conclut ce chapitre en répondant à la question suivante :

« Comment calculer concrètement une intégrale ? »

Il n'y a que deux cas de figure.

1ier cas : On connaît une primitive de la fonction f dont on souhaite calculer l'intégrale car elle relève du tableau ci-dessous.

Fonction	Primitives
A (constante)	$Ax + C$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$u'u^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C$
$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u} + C$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$
$u'e^u$	$e^u + C$

On utilise alors la définition de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a),$$

F désignant une primitive de f sur le segment $[a,b]$.

2ième cas : On ne connaît pas de primitives de la fonction f dont on souhaite calculer l'intégrale. On effectue alors une intégration par parties pour faire apparaître des fonctions plus simples dont on connaît une primitive.

Théorème 9 (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur le segment $[a,b]$ admettant des dérivées u' et v' continues sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Preuve : D'après la formule de dérivation d'un produit, pour tout $t \in [a,b]$, $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$.
On en déduit par intégration que : $\displaystyle\int_a^b (uv)'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))\mathrm{d}t$.
D'une part, par définition de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b (uv)'(t)\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b$.
D'autre part, par linéarité, $\displaystyle\int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$.
En réarrangeant les termes, on obtient bien : $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$.

Remarque : On peut reformuler les hypothèses en disant que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

$\Longrightarrow$ Il est essentiel de pratiquer ce résultat de nombreuses fois en exercices afin qu'il devienne naturel. Traitons un exemple. Calculons $I = \displaystyle\int_0^1 te^t\mathrm{d}t$. On doit identifier qui est u' et qui est v. On souhaite que $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t$ afin de faire apparaître l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^t\mathrm{d}t$ que l'on sait calculer. On prend donc $u(t) = e^t$ et $v(t) = t$. On applique la formule d'intégration par parties.

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 te^t\mathrm{d}t &= \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= \Big[e^t t\Big]_0^1 - \int_0^1 e^t \times 1\mathrm{d}t = e^1 - \int_0^1 e^t\mathrm{d}t \\ &= e^1 - \Big[e^t\Big]_0^1 = e^1 - (e^1 - 1) = 1. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Coin des astuces : Dans une intégrale comportant une fonction exponentielle, la fonction u' correspond très souvent au terme exponentiel. Dans une intégrale comportant une fonction logarithme, la fonction v correspond très souvent au terme logarithmique.

13.4 Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition 10 (Fonction continue par morceaux, intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $\sigma : x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que :
• pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$,
• pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ se prolonge en une fonction continue $\tilde{f}_k$ sur $[x_k, x_{k+1}]$.
Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k(t)\mathrm{d}t.$$